Т. В. КАЗАКОВА
М. В. ЩЕГЛОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ

Издательство
Московского университета
1978

Министерство
высшего
и среднего
специального
образования
СССР

Научно-методический
кабинет
по заочному
и вечернему
обучению
Московского
государственного
университета
им.М.В.Ломоносова

Т.В.КАЗАКОВА, М.В.ЩЕГЛОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник упражнений

для студентов естественных
факультетов государственных
университетов

Издание 3-е

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1978

Р е к о м е н д о в а н о

кафедрой математического анализа
механико-математического факультета
Московского университета

Казакова Т.В., Щеглова М.В.

Высшая математика. Сборник упражнений. М., Изд=во Моск. ун-та, 1978.

с. III, с ил.

Книга содержит упражнения по курсу "Высшая математика" для студентов I и II курсов естественных факультетов государственных университетов, где на преподавание математики отводится до 200 учебных часов.

Некоторые задачи, включенные в сборник, заимствованы из различных распространенных сборников задач по высшей математике, в частности, из "Сборника задач и упражнений по математическому анализу" Б.П. Д е м и д о в и ч а и "Сборника задач по высшей математике" В.П. М и н о р с к о г о.

© Издательство Московского университета, 1978 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение в анализ	3
1. Понятие функции	3
2. Графическое изображение функций	5
3. Пределы	10
Дифференциальное исчисление	16
4. Производная и дифференциал	16
5. Приложения производной	22
Интегральное исчисление	27
6. Неопределенный интеграл	27
7. Определенный интеграл и его приложения	36
8. Несобственные интегралы	44
Ряды	45
9. Сравнение бесконечно малых	45
10. Числовые ряды	46
11. Функциональные ряды	50
12. Разложение функций в степенные ряды	55
13. Ряды Фурье	57
Функции нескольких переменных	59
Дифференциальные уравнения	65
Ответы	69

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Указать на оси OX множества точек x, удовлетворяющих неравенствам:

1. $|x|<3$;
2. $x^2 \leqslant 4$;
3. $x^2>16$;
4. $|x-2|<3$;
5. $|2x+3|<1$;
6. $(x+1)^2 \leqslant 9$;
7. $2x^2 \leqslant 50$;
8. $(x+3)^2 \leqslant 3$;
9. $(5x+6)^2 \geqslant 1$;
10. $x^2-4x+5 \leqslant 0$;
11. $x^2-3x-4 \leqslant 0$;
12. $x-x^2>0$;
13. $x^2-2x+5<0$;
14. $x^2-11x+10>0$.

Найти области определения функций, заданных следующими формулами:

15. $y=3x+2$;
16. $y=x^3+5x+6$;
17. $y=\dfrac{3x-1}{5x-6}$;
18. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$;
19. $y=\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$;
20. $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$;
21. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$;
22. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$;
23. $y=\sqrt{4-x^2}$;
24. $y=\sin 3x$;
25. $y=x+\cos 2x$;
26. $y=\operatorname{tg} x$;
27. $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;
28. $y=\arcsin x$;
29. $y=\arccos(x+2)$;

30. $y=\operatorname{arctg}(2x+1)$;

31. $y=\log_2\log_3\log_4 x$;

32. $y=\log_2(-x)$;

33. $y=\log_{1/3}|x|$;

34. $y=\log_5(2x-1)$;

35. $y=\log_7(4x-x^2)$;

36. $y=\dfrac{1}{\log_5(1-3x)}$;

37. $y=3^{\frac{1}{x}}$;

38. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

39. $y=\arcsin\dfrac{1}{x+3}$;

40. $y=\dfrac{\sin x}{x^2-5x+4}$;

41. $f(x)=x^2+x-2$, найти $f(0), f(1), f(-2), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f(-x), f(x+1), f(x+\Delta x)$;

42. $f(x)=\arccos(\lg x)$, найти $f\left(\dfrac{1}{10}\right), f(1), f(10)$.

Указать, какие из данных функций четные и какие нечетные:

43. $y=\cos x+x\sin x$;

44. $y=x\cdot 2^{-x}$;

45. $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}+(x+2)^{\frac{2}{3}}$;

46. $y=2x\sin^2 x-3x^3$;

47. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-3^x$;

48. $y=\dfrac{x}{\sin x}$;

49. $y=5\log_2(x+1)$;

50. $y=x\cdot 4^{-x^2}$;

51. $y=\log_2\dfrac{2-x}{2+x}$;

52. $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$;

53. $y=5^{-x^2}$;

54. $y=x^2-x$;

55. $y=x^3+x^2$.

56. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на всей оси OX. Показать, что функция $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ четна, а функция $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ нечетна.

Найти наименьший период каждой из следующих функций:

57. $y=\sin 4x$;

58. $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

59. $y=\sin x+\cos 2x$;

60. $y=\cos^2 3x$;

61. $y=\sin 3x+\sin 2x$;

62. $y=|\sin x|$;

63. $y=\sin(3x+1)$;

64. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

65. $y=\sin^2\dfrac{x}{3}$;

66. $y=\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

2. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Построить графики функций:

1. $y=4x+8$;
2. $y=-\frac{x}{3}+2$;
3. $y=3x-2$;
4. $y=|x|$, где

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0; \end{cases}$$

5. $y=\frac{|x|}{x}$;
6. $y=2|x+1|$;
7. $y=-|5x+2|$;
8. $y=|x|+3$;
9. $y=|x|+x$;
10. $y=\frac{x}{2}+|x|-1$;
11. $y=\frac{1}{2}(|x+1|-|x-1|)$;
12. $y=x^2+2$;
13. $y=-x^2+3$;
14. $y=2x^2+1$;
15. $y=|4-x^2|$;
16. $y=-4x^2+1$;
17. $y=(x-4)^2$;
18. $y=-(x+1)^2$;
19. $y=(x+2)^2-1$;
20. $y=(x-2)^2+1$;
21. $y=1-(x-3)^2$;
22. $y=x^2-4x+1$;
23. $y=x^2-5x+6$;
24. $y=x^2+2x-3$;
25. $y=3x-x^2$;
26. $y=2x^2-4x$;
27. $y=4-2x^2-2x$;
28. $y=4x-x^2-3$;
29. $y=2|x|-x^2$;
30. $y=x|x-1|$;
31. $y=|x^2-3x-4|$;
32. $y=(x-1)(1-|x|)$;
33. $y=|x-x^2-1|$;
34. $y=x^n$ при

$$n=3, 4, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3};$$

35. $y=\sqrt{x+1}$;
36. $y=\sqrt{1-4x}$;
37. $y=-\sqrt{2x-1}$;
38. $y=\sqrt[3]{8x-1}$;
39. $y=1-\sqrt[3]{2x+1}$;
40. $y=\frac{k}{x}$ при $k=\pm 1, \frac{1}{2}$;
41. $y=\frac{1}{x}+2$;
42. $y=-\frac{3}{x}-1$;
43. $y=3-\frac{4}{x}$;

44. $y = 1 + \frac{1}{x-2}$;

45. $y = 2 - \frac{3}{x+1}$;

46. $y = \frac{1}{x+3} - 1$;

47. $y = \frac{-1}{x+2} - 3$;

48. $y = \frac{x+5}{x+3}$;

49. $y = \frac{5-2x}{x-2}$;

50. $y = \frac{4x+7}{2x-5}$;

51. $y = \frac{9x+4}{3x+2}$;

52. $y = \frac{3-3x}{2-6x}$;

53. $y = \frac{6x-2}{x-1}$;

54. $y = \left|\frac{7x+5}{5x+6}\right|$;

55. $y = \left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$;

56. $y = \left|\frac{x}{3x+5}\right|$;

57. $y = \frac{2+x}{|x-1|}$;

58. $y = \frac{2|x|+3}{2-|x|}$;

59 $y = \frac{|7x+2|}{2x+1}$;

60. $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$;

61. $y = \frac{|2-x|}{4x-1}$;

62. $y = \frac{x+2}{|x+2|}$;

63. $y = \frac{|x-3|}{x-3}$;

64. $y = a^x$ при $a = 2, \frac{1}{2}, 3$;

65. $y = 3^{x-2}$;

66. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$;

67. $y = 5^{\frac{x}{2}-1}$;

68. $y = -2^{2x-1}$;

69. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;

70. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3x} - 2$;

71. $y = 3^{\frac{x}{2}} - 2$;

72. $y = 2^{1-2x} - 1$;

73. $y = 2 - 3^{\frac{x+1}{2}}$;

74. $y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$;

75. $y = 2^{1-2x} + 1$;

76. $y = a^{|x|}$ при $a = 2, \frac{1}{2}$

77. $y = 2^{\frac{1}{x}}$;

78. $y = 3^{-\frac{1}{x}}$;

79. $y = 2^{2x-x^2}$;

80. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$;

81. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$;

82. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;

83. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/x}$;

84. $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$;

85. $y = 2^{\frac{2-x}{x+1}}$;

86. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x-1}{3x+1}}$;

87. $y = 3^{\frac{x+1}{2x+1}}$;

88. $y = 1 + 3^{\frac{x}{x-1}}$;

89. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$;

90. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

91. $y = 2^{\sin x}$;

92. $y = 2^{4x-x^2-1}$;

93. $y = \log_a x$ при

$a = 2, \frac{1}{2}, 10$;

94. $y = \log_{1/3}(2x-3)$;

95. $y = \log_2(x-2)$;

96. $y = \log_{1/3}(3-2x)$;

97. $y = -\log_3\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

98. $y = \frac{1}{2}\log_{1/3}(4-3x)$;

99. $y = \log_{1/3}(2x-5)$;

100. $y = \log_2(-x)$;

101. $y = \log_{1/2}|x|$;

102. $y = \log_{1/3}|3-2x|$;

103. $y = \log_4|x+2|$;

104. $y = |\log_3(4-3x)|$;

105. $y = \left|\log_{1/2}\left(2-\frac{x}{2}\right)\right|$;

106. $y = |\log_2|3x+4||$;

107. $y = \log_2(x^2+2x)$;

108. $y = \log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$;

109. $y = \log_2\frac{x+4}{2-x}$;

110. $y = \log_3(x^2-6x+5)$;

111. $y = \log_{1/3}(2x^2-4x+3)$;

112. $y = \log_{1/4}(4x-x^2)$;

113. $y = \log_{1/2}\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$;

114. $y=\sin ax$

при $a=1, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$;

115. $y=\cos ax$

при $a=1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$;

116. $y=\operatorname{ctg} ax$

при $a=1, 2, \frac{1}{2}, \pi$;

117. $y=\operatorname{tg} ax$

при $a=1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi$;

118. $y=\cos\frac{3}{2}x+1$;

119. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;

120. $y=2\sin 3x+1$;

121. $y=\frac{1}{2}\cos \pi x-1$;

122. $y=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$;

123. $y=-2\sec\frac{x}{2}$;

124. $y=\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2x$;

125. $y=1-2\sin \pi x$;

126. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$;

127. $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

128. $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$;

129. $y=\left|\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$;

130. $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

131. $y=-2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$;

132. $y=2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$;

133. $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$;

134. $y=\sin x+\cos x$;

135. $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$;

136. $y=|\sin 3x|$;

137. $y=\sin^2 x$;

138. $y=\cos^2 x$;

139. $y=\log_2|\sin x|$;

140. $y=\log_{1/2}\cos x$;

141. $y=x\sin x$;

142. $y=x+\sin x$;

143. $y=x\sin^2 x$;

144. $y=|x|\sin x$;

145. $y=\arcsin(x+1)$;

146. $y=\arccos(x-2)$;

147. $y=\arcsin(3x+1)$;

148. $y=-\arcsin\frac{x+2}{3}$;

149. $y=\frac{1}{2}\arccos(2x-3)$;

150. $y=2\operatorname{arctg}(2x-1)$;

151. $y=-\operatorname{arcctg}(4x-1)$;

152. $y = 3 \operatorname{arcctg}(3x+1)$;

153. $y = 2 \arccos \frac{1-x}{2}$;

154. $y = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{x+2}{2}$;

155. $y = \frac{1}{3} \arccos \frac{2x-3}{2}$;

156. $y = 2 \arcsin \frac{2x+3}{3}$;

157. $y = \arcsin \frac{1}{x}$;

158. $y = \arccos \frac{1}{x}$;

159. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

160. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$;

161. $y = \arccos \frac{1}{x-3}$;

162. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+2}$;

163. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-1}{x+1}$;

164. $y = \arccos \frac{x}{x+1}$;

165. $y = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}$;

166. $y = 2 \arcsin \frac{x}{1-2x}$;

167. $y = \frac{1}{x^2-4}$;

168. $y = \frac{1}{1-x^2}$;

169. $y = \frac{1}{x^2-x}$;

170. $y = \frac{1}{x^3}$;

171. $y = \frac{1}{x^2-4x+1}$;

172. $y = \frac{1}{\log_2(3x+1)}$;

173. $y = \frac{1}{4^{3x-1}+2}$;

174. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1-3x)}$;

175. $y = \frac{1}{\log_{1/2}(1-4x)}$;

176. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}$;

177. $y = \frac{1}{3^x + 3^{-x}}$;

178. $y = \frac{1}{\arcsin(3x+1)}$;

179. $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$;

180. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

181. $y = \frac{1-x^2}{x^2-4}$;

182. $y = \frac{1}{\arccos 2x}$;

183. $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

184. $y = \log_2 \dfrac{x^2-1}{x+2}$;

185. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$;

186. $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$;

187. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcctg}(x-1)}$;

188. $y = \log_{1/2} \dfrac{2|x|-1}{|x|-2}$;

189. $y = \log_2 (\sqrt[3]{x+1}+1)$;

190. $y = |\operatorname{tg} x + 1|$;

191. $y = |x| + \dfrac{1}{x}$;

192. $y = \sin x + |\sin x|$;

193. $y = \log_{1/2} |x^2 - 3x + 2|$;

194. $y = x^2 - |x| + 3x - 2$;

195. $y = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 2}$;

196. $y = \dfrac{1}{|2^{x-1} - 1|}$.

3. ПРЕДЕЛЫ

1. $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 5x^2 + 6x + 1)$;

2. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$;

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 4x - 1}{3x^2 + x + 2}$;

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$;

5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$;

6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}$;

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$;

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$;

10. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}$;

11. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$;

12. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$;

13. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$;

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 4}{x - 2}$;

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 + 5x + 1}{3 + 14x^2 + 2x}$;

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$;

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 3}{x^2 + 2}$;

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 + 5}$;

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5}$;

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$;

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$;

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$;

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$;

27. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$;

28. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$;

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2+1}{4-x^2}+2^{\frac{1}{x-1}}\right)$;

30. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

31. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$;

32. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4x}-x)$;

33. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x+1}-$
$-\sqrt{x^2-3x-4})$;

34. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+4}-$
$-\sqrt{x^2-3x+1})$;

35. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+x+1})$;

36. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2-a^2})$;

37. $\lim\limits_{x\to2} \left[\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}}{x^2-3x+2}-\right.$
$\left.-\dfrac{\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}\right]$;

38. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

39. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

40. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2}-x)$;

41. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2}-x)$;

42. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}$

43. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}$;

44. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{x}$;

45. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$;

46. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 10x}{\sin 9x}$;

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$;

48. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \sin x}$;

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1}$;

52. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$;

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$;

54. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$;

55. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}+4^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\right)$;

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$;

57. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)}{x}$;

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin x}{\sec 2x - 1}$;

59. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+b)+\sin(x-b)}{2x}$;

60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 15x}$;

61. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

62. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \cdot \sin \dfrac{x}{3^n}$;

63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$;

64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

65. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$;

66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$;

67. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$;

68. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$;

69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}$;

70. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$;

71. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[5]{x}-1)(2^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$;

72. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$;

73. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

74. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$;

75. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$;

76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$;

77. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;

78. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg\dfrac{x}{10}}{x-10}$;

79. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$;

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$;

81. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$;

82. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(\log_2 x)}{x-2}$;

83. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}x)}{1-\operatorname{ctg}x}$;

84. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ a>0}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)n$;

85. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$;

86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$;

87. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-10^x}{3^x-7^x}$;

88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{3x}}{\sin 4x-\sin 3x}$;

89. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{4+x}{2+x}$;

90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$;

91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{\frac{x}{2}}-1}{\ln(1+3x)}$;

92. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(2x+5)-\ln(2x+1)]$;

93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{\log_7(1+5x)}$;

94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$;

95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$;

96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{\arccos x}$;

97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\operatorname{tg}x}-3^{\sin x}}{\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^3}$;

98. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4^{x-2}-1}{3^{x-2}-1}$;

99. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5^x-5^5}{\operatorname{arctg}(x-5)}$;

100. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$;

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-2x)}$;

102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$;

103. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\ln x)}{2x-2e}$;

104. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{x-3}$;

105. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{3x-1}{3x-6}$;

106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$;

107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$;

109. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

110. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}\right)^{n}$;

111. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^{n}$;

112. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\lg x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

113. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

114. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$;

115. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

116. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+4)-\ln n]$;

117. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln n-\ln(n+2)]$;

118. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{\frac{1}{x}}$;

119. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$;

120. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x+\sin 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$;

121. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

122. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;

123. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$;

124. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

125. $\lim\limits_{x\to 5}\left(2-\dfrac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}}$;

126. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{7+x}\right)^{\operatorname{cosec}\frac{2}{x}}$;

127. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$;

128. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

129. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2x}$;

130. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$;

131. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sin(x-1)}$;

132. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$;

133. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$;

134. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-5^n}{1+5^{n+1}}$;

135. $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{3-10^n}{4+10^{n+1}}$;

136. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x(\sqrt[3]{1+3x^2}-1)}{x\ln(\cos 3x)}$;

137. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}}\dfrac{2^{3x}-\sqrt{2}}{6x-1}$;

138. $\lim\limits_{x\to\infty} 2x \log_2 \dfrac{3+x}{4+x}$;

139. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x^2}$;

140. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{7}{x}\right)^{x^2}$;

141. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin 5x - \sin 4x}$;

142. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-5x+6)\sin(x-2)}{x^2-4x+4}$

143. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^\alpha - 2^\alpha}{x^\beta - 2^\beta}$;

144. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$;

145. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1+\operatorname{tg} x}{x}$;

146. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$;

147. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{x}$;

148. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cos(3x-9)-\cos(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+10}-1}$;

149. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\sqrt{x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}+1}-1}$;

150. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{\log_3(3+x^2)-1}$;

151. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\log_3 x - 1}$;

152. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log_4 \cos(x-1)}{\sqrt[5]{2+x^2-2x}-1}$;

153. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4^x - 16}{\sqrt[5]{3-x}-1}$;

154. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+5\sin x}{x+1}$;

155. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-3x-4}$;

156. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}$;

157. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+1}$;

158. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_3(1+3x)+\log_3(1-3x)}{x^2}$;

159. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sin x - \sin 5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

160. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{7}}{x-7}$;

161. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\cos \pi x}{\operatorname{ctg} 7\pi x}$;

162. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{36x^2-\pi^2}$;

163. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2^x - 8}{\sin \pi x}$;

164. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}}$;

165. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{\sin \pi x}$;

166. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2+3x}-2}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}}$;

167. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 5x+\sin 6x+\sin 7x}{\sin 9x-\sin 4x}$;

168. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{3}}{\log_3(2x-17)}$.

Построить графики функций:

169. $y=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x>0}} \dfrac{x^n}{1+x^n}$;

170. $y=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x>0}} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Исходя из определения, найти производные следующих функций:

1. $y=x^2$;
2. $y=x^3$;
3. $y=\sqrt{x}$;
4. $y=\dfrac{1}{x}$;
5. $y=\dfrac{1}{x^2}$;
6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
7. $y=\sin 2x$;
8. $y=\cos\dfrac{x}{2}$;
9. $y=\dfrac{1}{2x+1}$;
10. $y=\sqrt{1+3x}$.

Найти производные функций:

11. $y=x^4+3x^2-2x+1$;
12. $y=7x^7+3x^2-4x-1$;
13. $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+4$;
14. $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+2$;
15. $y=4x^5-3\sin x+5\operatorname{ctg} x$;
16. $y=3\sqrt{x}+4\cos x-2\operatorname{tg} x+3$;
17. $y=3+4x^2+\sqrt[5]{x^5}+\dfrac{1}{x^2}+\sin x+\cos x+\ln x$;
18. $y=\sqrt[8]{x^3}-4x^6+5\ln x-7\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$;
19. $y=\log_2 x+3\log_3 x$;
20. $y=4e^x+\operatorname{arctg} x+\arcsin x$;
21. $y=e^x-\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}+\dfrac{x^4}{4}$;
22. $y=5^x+6^x+\left(\dfrac{1}{7}\right)^x$;
23. $y=\arcsin x+3\sqrt[3]{x}+5\arccos x$;

24. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$;

25. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

26. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$.

27. $y = x \sin x$;

28. $y = x^2 \operatorname{tg} x$;

29. $y = \sqrt[7]{x} \ln x$;

30. $y = x \arccos x$;

31. $y = \sqrt[3]{x} \operatorname{arcctg} x$;

32. $y = x^2 \log_3 x$;

33. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

34. $y = \frac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x$;

35. $y = \frac{\cos x}{1 - 2 \sin x}$;

36. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$;

37. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$;

38. $y = \frac{x \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$;

39. $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$;

40. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$, найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$;

41. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$, найти $f'(2)$, $f'(-2)$;

42. $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$;

43. $f(x) = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$, найти $f'(0)$;

44. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, найти $f'(e)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $f'(e^2)$;

45. $f(x) = x \ln x$, найти $f'(-1)$, $f'(e)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$;

46. $y = \sin 3x$;

47. $y = \sin(x^2 + 5x + 2)$;

48. $y = \frac{1}{b} \cos(a - bx)$;

49. $y = \sqrt{1 - x^2}$;

50. $y = \sqrt{1 + 5 \cos x}$;

51. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;

52. $y = \sin^2 x$;

53. $y = \sin^3 x$;

54. $y = \cos^{100} x$;

55. $y = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$;

56. $y = \operatorname{tg}(x^2+3)$;

57. $y = \ln \sin x$;

58. $y = \ln \cos x$;

59. $y = \ln \operatorname{tg} 5x$;

60. $y = \ln(1+\cos x)$;

61. $y = e^{\operatorname{tg} x}$;

62. $y = \ln(x^2-3x+7)$;

63. $y = \ln(x^2+2x)$;

64. $y = \ln(x+\sqrt{x^2+5})$;

65. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$;

66. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$;

67. $y = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$;

68. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}$;

69. $y = \ln \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$;

70. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$;

71. $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

72. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$;

73. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$;

74. $y = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$;

75. $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2}$;

76. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$;

77. $y = \sin^2 x^3$;

78. $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}$;

79. $y = \frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$;

80. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

81. $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

82. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right.$

83. $y = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^3} + \frac{1}{x}$

84. $y = a^{\sin x}$, $a > 0$, $a \neq$

85. $y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$;

86. $y = x^2 e^{-x}$;

87. $y = (x+2) e^{-x^2}$;

88. $y = e^{\frac{x}{3}} \cos \frac{x}{3}$;

89. $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$;

90. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$;

91. $y = 10^{3-\sin^2 2x}$;

92. $y = \sin(2^x)$;

93. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

94. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

95. $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1})$;

96. $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$;

97. $y = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$;

98. $y = \log_5 \cos 7x$;

99. $y = \log_7 \cos \sqrt{1+x}$;

100. $y = e^{\sqrt[7]{x^2}}$;

101. $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$;

102. $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$;

103. $y = \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})$;

104. $y = \ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

105. $y = \arccos(1-2x)$;

106. $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$;

107. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$;

108. $y = \arcsin(e^{4x})$;

109. $y = \arcsin\sqrt{x}$;

110. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$;

111. $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}}$;

112. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

113. $y = \ln \arccos 2x$;

114. $y = \operatorname{arctg} \ln(5x+3)$;

115. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{x-3}$;

116. $y = \operatorname{arcctg}^2 \dfrac{1}{x}$;

117. $y = \arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$;

118. $y = \operatorname{tg} \sin \cos x$;

119. $y = e^{x^2 \operatorname{ctg} 3x}$;

120. $y = a^{\sqrt[3]{\cos x}\ \operatorname{tg}^2 x}$, $a>0$, $a\neq 1$;

121. $y = \ln \sin \operatorname{tg} e^{-\frac{x}{2}}$;

122. $y = \ln^5 \sin x$;

123. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$;

124. $y = \sqrt[5]{\ln \sin \dfrac{x+3}{4}}$;

125. $y = e^{\sqrt{1+\ln x}}$;

126. $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$;

127. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

128. $y = \sqrt{1-\arccos^2 x}$;

129. $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$;

130. $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

131. $y = \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \right.$

$\left. + \ln\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right)$;

132. $y = 2\ln(x^2+5) -$

$-\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)$;

133. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)$;

134. $y = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3}$;

135. $y = \ln (x \sin x \cdot \sqrt{1 - x^2})$;

136. $y = x^x$;

137. $y = x^{\frac{1}{x}}$;

138. $y = x^{\sin x}$.

139. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;

140. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

141. Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y = 4 - x^2$ в точке пересечения ее с осью OX при $x > 0$. Построить параболу, касательную и нормаль.

142. Написать уравнения касательных к графикам следующих функций.

Построить графики и касательные к ним.

1) $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью OX;
2) $y = \ln x$ в точке пересечения с осью OX;
3) $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x = 1$;
4) $y = e^{2x}$ в точке пересечения с осью OY.

Найти производные 2-го порядка от функций:

143. $y = e^{x^2}$;

144. $y = \operatorname{tg} x$;

145. $y = \operatorname{ctg} x$;

146. $y = \arcsin \frac{x}{2}$;

147. $y = \sin^2 x$;

148. $y = \cos^2 x$;

149. $y = \sqrt{1 + x^2}$;

150. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

151. $y = \ln (2x - 3)$.

Найти производные 3-го порядка от функций:

152. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

153. $y = xe^{-x}$;

154. $y = e^x \cos x$;

155. $y = x^2 \sin x$;

156. $y = x^3 2^x$;

157. $y = x \ln x$.

Найти производные n-го порядка от функций:

158. $y = \sin x$;

159. $y = \cos x$;

160. $y = e^x$;

161. $y = \ln x$;

162. $y = 3^x$;

163. $y = x^m$,
где $m > 0$ — целые;

164. $y = \sin 3x$:

165. $y = e^{\frac{x}{2}}$;

166. $y = \ln (1+x)$:

167. $y = 2^{3x}$;

168. $y = \sin^2 x$;

169. $y = \cos^2 x$;

170. $y = \ln (2—3x)$;

171. $y = (4x+1)^n$;

172. $y = x \cos x$;

173. $y = x^3 e^x$;

174. $y = x^2 \sin \frac{x}{3}$;

175. $y = x^2 \ln x$.

Найти y_x', если:

176. $x^2+y^2 = a^2$;

177. $y^2 = 2px$;

178. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

179. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

180. $\operatorname{ctg} y = xy$;

181. $e^{-x} \sin y — e^{-y} \cos x = 0$;

182. $e^{xy} — x^2 + y^3 = 0$;

183. $\operatorname{arc tg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln (x^2+ y^2)$;

184. $\operatorname{arc tg} y = x+y$;

185. $x^2 = \frac{y-x}{x+2y}$.

Найти дифференциалы функции:

186. $y = x^n$;

187. $y = \operatorname{tg} x$;

188. $y = \sin^3 2x$;

189. $y = \ln x$;

190. $y = |x|$;

191. $y = \ln (\sin \sqrt{x})$;

192. $y = \operatorname{arc sin} \frac{1}{x}$;

193. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$;

194. $y = 2^{-x^2}$.

195. $y = x^2$; найти приближенно Δy, если $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

196. Вывести приближенную формулу

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Найти приближенно $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{33}$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

197. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$

198. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} - t; \end{cases}$

199. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}; \end{cases}$

200. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

201. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + t; \end{cases}$

202. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

203. $\begin{cases} x = \frac{1-t}{(t+1)^2}, \\ y = \frac{t(1-t)}{(t+1)^2}; \end{cases}$

204. $\begin{cases} x = \frac{t}{t^3+1}, \\ y = \frac{t^2}{t^3+1}. \end{cases}$

5. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$;

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^{3x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$;

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{2x}}$;

12. $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x+\sin x}$;

14. $\lim\limits_{x\to0+}\operatorname{tg} x\cdot\ln x$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2\sin\dfrac{x}{2}}{x+1}$;

16. $\lim\limits_{x\to1+}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

17. $\lim\limits_{x\to0+} x^x$;

18. $\lim\limits_{x\to0+} x^{\sin x}$;

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_3(1+x)}{\log_3(1+2x)}$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+3)e^{\frac{1}{x}}-x]$;

21. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

22. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$;

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1+x-\dfrac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}$;

25. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{9}{4}}(\sqrt[4]{x^3+1}-\sqrt[4]{x^3-1})$;

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

28. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}-2)$;

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$;

31. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1-x\ln2}{(1-x)^m-1+mx}$;

32. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

33. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos^4 x}{(1+x^2)^m-1}$;

34. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\ln^2(1+x)}{e^{x^2}-1}$;

35. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

36. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

37. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

38. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x)^{\operatorname{ctg} 6x}$.

Построить графики функций:

39. $y = x^3 - 3x$;

40. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

41. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

42. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;

43. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;

44. $y = \frac{x^4}{4} + x^3$;

45. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$;

46. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$;

47. $y = 3x^5 - 5x^3$;

48. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$;

49. $y = (x^2 - 1)^3$;

50. $y = 32x^2 (x^2 - 1)^3$;

51. $y = x + 2\sqrt{-x}$;

52. $y = x\sqrt{1-x}$;

53. $y = \frac{6\sqrt{x}}{x+2}$;

54. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$;

55. $y = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$;

56. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

57. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$;

58. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$;

59. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

60. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} - (x+2)^{\frac{2}{3}}$

61. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}$

62. $y = x^{\frac{2}{3}} (1-x)$;

63. $y = x (x-1)^{\frac{2}{3}}$;

64. $y = \frac{x}{1-x^2}$;

65. $y = \frac{x}{x^2-4}$;

66. $y = \frac{x}{x^2+1}$;

67. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

68. $y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$;

69. $y = \frac{x-1}{(x-2)(x-5)}$;

70. $y = \frac{x}{(x-1)(4-x)}$;

71. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;

72. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$;

73. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

74. $y = \frac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$;

75. $y = \frac{x^2-x+1}{3x-x^2-3}$;

76. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$;

77. $y = (x+1)e^{-x}$;

78. $y = x^2e^{-x}$;

79. $y = (x+4)^2e^{-\frac{x}{2}}$;

80. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

81. $y = xe^{\frac{3-x^2}{2}}$;

82. $y = (1-x)e^x$;

83. $y = (x-2)^2e^x$;

84. $y = x^3e^x$;

85. $y = x^3e^{-x}$;

86. $y = \dfrac{e^x}{x}$;

87. $y = \dfrac{e^x}{x-2}$;

88. $y = \dfrac{e^x}{4(1-x)}$;

89. $y = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$;

90. $y = \dfrac{e^{-x}}{x^2-3}$;

91. $y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;

92. $y = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

93. $y = \dfrac{2}{e^x(x+3)}$;

94. $y = x^2e^{-x^2}$;

95. $y = x\ln x$;

96. $y = x-\ln x$;

97. $y = x\ln^2 x$;

98. $y = x^2\ln^2 x$;

99. $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

100. $y = x^2\ln x$;

101. $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$;

102. $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

103. $y = \dfrac{x}{\ln|x|}$;

104. $y = -\dfrac{\ln x}{x^2}$;

105. $y = \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$;

106. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$;

107. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

108. $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$;

109. $y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$;

110. $y = 2x+\dfrac{1}{x^2}$;

111. $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;

112. $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$;

113. $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

114. $y = \dfrac{(x-2)^2}{2(x-1)}$;

115. $y = x+\operatorname{arc\,tg} x$;

116. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;

117. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$;

118. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arc\,ctg} x$;

119. $y = x - \operatorname{arc\,tg} 2x$;

120. $y = x - 2 \operatorname{arc\,tg} x$;

121. $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$;

122. $y = 1 + xe^{\frac{2}{x}}$;

123. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$;

124. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$;

125. $y = \sqrt[3]{x(1+x^2)}$;

126. $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$;

127. $y = x - 2 \operatorname{tg} x$;

128. $y = x + \sin 2x$;

129. $y = \sqrt[3]{x^4(2-x^2)}$.

Задачи на наибольшие и наименьшие значения

130. Из прямоугольников, у которых сумма трех сторон равна 100, выбрать тот, который имеет наибольшую площадь.

131. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании a данного треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту h.

132. Из квадратного листа картона со стороной a вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся крестообразной фигуры склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

133. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом V так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

134. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения p. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

135. В прямой круговой конус радиуса R и высоты h вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

136. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

137. Через точку, лежащую внутри прямого угла, провести прямую, от которой стороны угла отсекают отрезок наименьшей длины. Найти длину этого отрезка.

138. Через точку, лежащую внутри прямого угла, провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади. Найти площадь этого треугольника.

139. Из сектора круга радиуса R свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

140. Даны точки A (0,3) и B (4,5). На оси OX найти точку, сумма расстояний которой до точек A и B наименьшая.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Найти интегралы:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)\,dx;$
2. $\int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx - \int \left(\frac{1}{x} - 5\right)dx;$
3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx;$
4. $\int \frac{5x^8 + 1}{x^4}\,dx;$
5. $\int \frac{x - 1}{\sqrt[5]{x^4}}\,dx;$
6. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx;$
7. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x}\,dx;$
8. $\int (2^x + 3^x)\,dx;$
9. $\int 4^x \left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx;$
10. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx;$
11. $\int \left(\frac{2}{1 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}\right)dx;$
12. $\int \frac{x^4}{1 + x^2}\,dx;$
13. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx;$
14. $\int (\sin x + 5\cos x)\,dx;$
15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx;$
16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$
17. $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x + 4}{\sin^2 x}\,dx;$
18. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx;$
19. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx;$

20. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

21. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

22. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

23. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

24. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$;

25. $\int 2^x e^x dx$;

26. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

27. $\int \cos 5x dx$;

28. $\int \sin 7x dx$;

29. $\int \cos \frac{x}{4} dx$;

30. $\int e^{-x} dx$;

31. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$;

32. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

34. $\int (2+5x)^9 dx$;

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;

36. $\int \sqrt{2x-5} dx$;

37. $\int \sqrt[3]{3-7x} dx$;

38. $\int \frac{dx}{5x+2}$;

39. $\int \frac{dx}{2-3x}$;

40. $\int \frac{x dx}{x^2+3}$;

41. $\int \operatorname{ctg} x dx$;

42. $\int \operatorname{tg} x dx$;

43. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$;

44. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5}$;

45. $\int \frac{\cos 3x dx}{3+\sin 3x}$;

46. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$;

47. $\int \sin^2 x \cos x dx$;

48. $\int \cos^3 x \sin x dx$;

49. $\int e^{\cos x} \sin x dx$;

50. $\int e^{-x^3} x^2 dx$;

51. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$;

52. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$;

53. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^5 x}$;

54. $\int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}\,dx$;

55. $\int \sqrt{3+\cos 5x}\,\sin 5x\,dx$;

56. $\int \frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[7]{3+5\sin 3x}}$;

57. $\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}\,dx$;

58. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x\,dx}{1+x^2}$;

59. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

60. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$;

61. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$;

62. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

63. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$;

64. $\int \sqrt[5]{x^3-8}\,x^2 dx$;

65. $\int \sqrt[4]{1-6x^5}\,x^4 dx$;

66. $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

67. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

68. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx$;

69. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}\,dx$;

70. $\int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}}\,dx$;

71. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$;

72. $\int \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^3}\,dx$;

73. $\int 4^{1-3x}\,dx$;

74. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

75. $\int e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$;

76. $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

77. $\int \frac{dx}{x^2-16}$;

78. $\int \frac{dx}{x^2+4}$;

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$;

82. $\int \frac{dx}{x^2-5}$;

83. $\int \frac{dx}{x^2+3}$;

84. $\int \frac{dx}{2-x^2}$;

85. $\int \frac{dx}{4x^2+5}$;

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$;

88. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$;

89. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$;

90. $\int \frac{dx}{3-5x^2}$;

91. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-5}}$;

92. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-x^4}}$;

93. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-3}}$;

94. $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$;

95. $\int \frac{\sin 2x dx}{5-\cos^2 2x}$;

96. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx$;

97. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

98. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

99. $\int \frac{5e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$;

100. $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt{3\cos^2 5x-2}}$;

101. $\int \frac{\sin \frac{x}{3}dx}{4\cos^2 \frac{x}{3}+9}$;

102. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$;

103. $\int \frac{x^6dx}{x^{14}+5}$;

104. $\int \frac{e^{-x}dx}{e^{-2x}+2}$;

105. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

106. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

107. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

111. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$;

112. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx$

113. $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3}\,dx;$

114. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2+x-1};$

115. $\int \frac{2-x}{x^2+4x+29}\,dx;$

116. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx;$

117. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx;$

118. $\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx;$

119. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx;$

120. $\int \frac{3+x}{\sqrt{3x+2x^2}}\,dx;$

121. $\int \frac{4x+11}{\sqrt{x^2+8x+7}}\,dx;$

122. $\int \frac{7x-1}{x^2-6x+1}\,dx;$

123. $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx;$

124. $\int \frac{3x^2+5}{x+1}\,dx;$

125. $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}\,dx\,(a \neq 0);$

126. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx;$

127. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx;$

128. $\int \frac{3x-1}{2x+1}\,dx;$

129. $\int \frac{2x^2-1}{x^2-x+1}\,dx;$

130. $\int \frac{x^4-2x^3}{x-3}\,dx;$

131. $\int \frac{3x^3-2x^2}{x^2-6x+10}\,dx;$

132. $\int \frac{(x^3-2x)\,dx}{x^2-8x+7};$

133. $\int \frac{3x^2+1}{x^2-x+1}\,dx;$

134. $\int \frac{3+x}{x^2+7x+13}\,dx;$

135. $\int \frac{x^4-3x^2}{x-3}\,dx;$

136. $\int \frac{x^2+3x}{x^2+8x-7}\,dx;$

137. $\int \ln x\,dx;$

138. $\int x \ln x\,dx;$

139. $\int x \ln(3x+2)\,dx;$

140. $\int (x^2+3x+2)\ln x\,dx;$

141. $\int xe^{-x}dx;$

142. $\int xe^{5x}dx;$

143. $\int x^3 e^{-x}\,dx$;

144. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;

145. $\int (2x+3)\,e^{2x}\,dx$;

146. $\int x\cos x\,dx$;

147. $\int x\sin x\,dx$;

148. $\int (x+1)\cos 3x\,dx$;

149. $\int x^2\cos x\,dx$;

150. $\int x\cos^2 x\,dx$;

151. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

152. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$;

153. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

154. $\int \arcsin x\,dx$;

155. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;

156. $\int x\operatorname{arcctg}(1-x)\,dx$;

157. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

158. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}\,dx$;

159. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$;

160. $\int e^x\sin x\,dx$;

161. $\int e^x\cos x\,dx$;

162. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$;

163. $\int e^x\sin\frac{x}{2}\,dx$;

164. $\int \ln^2 x\,dx$;

165. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}\,dx$;

166. $\int \ln(x^2+2)\,dx$;

167. $\int \cos(\ln x)\,dx$;

168. $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$;

169. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$;

170. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$;

171. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

172. $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}\,dx$;

173. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

174. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$;

175. $\int \sqrt{7-x^2}\,dx$;

176. $\int \sqrt{x^2-5}\,dx$;

177. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$;

178. $\int \sqrt{x^2+2}\,dx$;

179. $\int \sqrt{2-3x^2}\,dx$;

180. $\int \sqrt{2x^2-1}\,dx$;

181. $\int \sqrt{6x - x^2}\, dx$;

182. $\int \sqrt{x^2 - 4x}\, dx$;

183. $\int \sqrt{x^2 + 5x + 4}\, dx$;

184. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$;

185. $\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$;

186. $\int \sqrt{2x - x^2}\, dx$;

187. $\int \sin x \sqrt{2 - 3\cos^2 x}\, dx$;

188. $\int e^x \sqrt{e^{2x} + 3}\, dx$;

189. $\int \cos x \sqrt{\sin^2 x + 3}\, dx$;

190. $\int e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4 - e^x}\, dx$;

191. $\int \sqrt{\ln^2 x + 1}\, \frac{dx}{x}$;

192. $\int (2x - 1) \sqrt{3x - x^2}\, dx$;

193. $\int (x + 3) \sqrt{5x + 2x^2}\, dx$;

194. $\int (x - 1) \sqrt{-6x - x^2}\, dx$;

195. $\int \sin^2 x dx$;

196. $\int \cos^2 x dx$;

197. $\int \sin^2 mx dx \quad (m \neq 0)$;

198. $\int \cos^2 mx dx \quad (m \neq 0)$;

199. $\int \sin^3 x dx$;

200. $\int \cos^3 x dx$;

201. $\int \cos^4 x dx$;

202. $\int \sin^5 x dx$;

203. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$;

204. $\int \sin^3 \frac{x}{4} \cos^3 \frac{x}{4}\, dx$;

205. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$;

206. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$;

207. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

208. $\int \cos^7 x dx$;

209. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$;

210. $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$;

211. $\int \sin^4 \frac{x}{2}\, dx$;

212. $\int (1 + 2\cos x)^2 dx$

213. $\int \cos^5 x dx$;

214. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$;

215. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3}}$;

216. $\int \frac{dx}{\sin 9x}$;

217. $\int \frac{dx}{\cos 5x}$;

218. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}\, dx$;

219. $\int \sin 3x \cos x dx$;

220. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$;

221. $\int \sin nx \sin mx\, dx$ $(m+n \neq 0,\ m-n \neq 0)$;

222. $\int \sin 3x \sin x dx$;

223. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos x dx$;

224. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$;

225. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$;

226. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$;

227. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$;

228. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$;

229. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$;

230. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$;

231. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

232. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$;

233. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;

234. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$;

235. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$;

236. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$;

237. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$;

238. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^4 x} dx$;

239. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

240. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

241. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$;

242. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$;

243. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x}$;

244. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$;

245. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$;

246. $\int \frac{\sin x dx}{b^2 + \cos^2 x}$ $(b \neq 0)$;

247. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$;

248. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx$;

249. $\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx$;

250. $\int \frac{e^{3x} dx}{e^x + 2}$;

251. $\int \frac{e^{4x} dx}{e^x - 1}$;

252. $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} - 1}$;

253. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx;$

254. $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx;$

255. $\int \frac{3e^{2x}-4e^x}{e^{2x}+4}\,dx;$

256. $\int \frac{e^{5x}dx}{e^x+1};$

257. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x};$

258. $\int \frac{dx}{\cos^4 x};$

259. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3};$

260. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx;$

261. $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx;$

262. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x};$

263. $\int (3x-1)\sqrt{-x^2-8x}\,dx;$

264. $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10}\,dx;$

265. $\int \frac{5e^{2x}-3e^x}{e^x+4-e^{2x}}\,dx;$

266. $\int (5x+3)\sqrt{x^2+3x+5}\,dx;$

267. $\int \frac{a^x dx}{a^{2x}+1}$ $(a>0, a\neq 1);$

268. $\int (1-2x)\sqrt{3x^2+8x}\,dx;$

269. $\int \frac{6x-10}{\sqrt{x^2+5x+17}}\,dx;$

270. $\int \sqrt{2x^2+4x+1}\,dx;$

271. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx;$

272. $\int \frac{3x+1}{x^2+10x+1}\,dx;$

273. $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$

274. $\int \sin(\ln x)\,dx;$

275. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx;$

276. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx;$

277. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg}(2x+1)\,dx;$

278. $\int \cos mx\cos nx\,dx$
$(m+n\neq 0, m-n\neq 0);$

279. $\int \frac{\ln(\cos x)\,dx}{\sin^2 x};$

280. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-9})}{\sqrt{x-3}}\,dx;$

281. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{3x}{2}+1};$

282. $\int \frac{dx}{3+\sin 5x};$

283. $\int \frac{dx}{\cos 3x+2\sin 3x};$

284. $\int \frac{dx}{\cos 2x-\sin 2x+2};$

285. $\int \frac{dx}{2+3\cos\frac{x}{2}};$

286. $\int \frac{dx}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1}.$

7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Вычислить:

1. $\int_1^2 (x^2+1)\,dx$;
2. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$;
3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$;
4. $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$;
5. $\int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x\,dx$;
6. $\int_1^e \ln x\,dx$;
7. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x dx$;
9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi$;
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi$;
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi$;
12. $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}\,dx$;
13. $\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}dx$;
14. $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx$;
15. $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$;
16. $\int_0^R x^3 \sqrt{R^2-x^2}\,dx \quad (R>0)$;
17. $\int_1^e \ln^2 x\,dx$;
18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

19. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=e$, $y=0$;
20. $y=x^2$, $y=1$;
21. $y=x^2$, $y=2-x^2$;

22. $y = x^2 - 1$, $x = 2$, $y = 0$, где $x \geqslant 1$;

23. $y = \sin 3x$, $y = 0$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$;

24. $y = \sin x$, $y = \sin^3 x$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

25. $y = x^2$, $y = x$;

26. $y = \arcsin 2x$, $x = 0$, $y = -\frac{\pi}{2}$;

27. $y = \sin 2x$, $y = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

28. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$;

29. $y = x^3$, $y = -1$, $x = 0$;

30. $y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$;

31. $y = x(3 - x)$, $y = x - 3$;

32. $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - x$;

33. $xy = 5$, $x + y = 6$;

34. $xy = -2$, $y = x - 3$;

35. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$;

36. кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

37. $\rho = a\cos 2\varphi$;

38. $\rho = a\sin 2\varphi$;

39. $\rho = 2 + \sin 2\varphi$;

40. $\rho = ae^{\varphi}$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

41. $\rho = a\sin 3\varphi$;

42. $\rho = a\cos 3\varphi$;

43. одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и осью OX;

44. $\rho = a\cos 4\varphi$; 45. $\rho = a\sin 4\varphi$.

46. Вычислить площади фигур, изображенных на рис. (1—6).

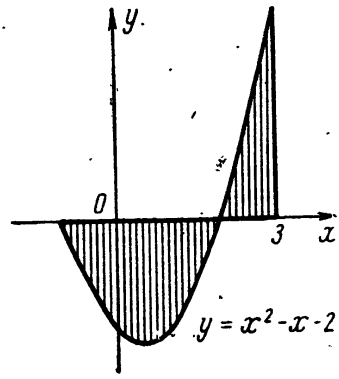

Рис. 1

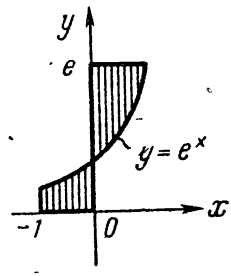

Рис. 2

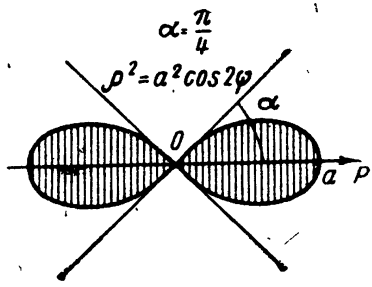

Рис. 3

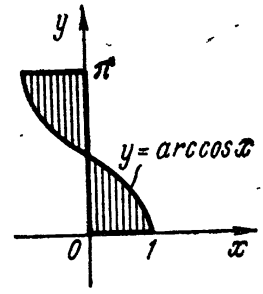

Рис. 4

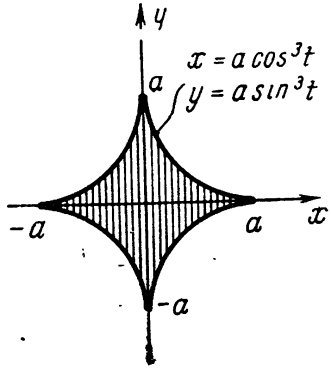

Рис. 5

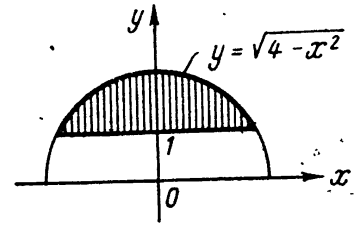

Рис. 6

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

47. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x \geqslant 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

48. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$, 2) $x=0$, 3) $x=2$, 4) $x=-2$, 5) $y=-1$, 6) $y=2$;

49. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

50. $y=x^2$, $y=4$, $x=0$, где $x \geqslant 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

51. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

52. $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

53. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, где $y \geqslant 0$ вокруг оси x;

54. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$, 2) $x=0$, 3) $y=-1$, 4) $x=1$, 5) $x=-1$, 6) $y=1$;

55. $y=\sin x$, $y=0$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$, 2) $x=0$, 3) $x=2\pi$, 4) $x=-1$, 5) $x=-2$, 6) $y=1$, 7) $y=-2$;

56. $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=0$ вокруг оси x;

57. $y=x$, $y=x^2$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

58. $y=\cos 2x$, $y=0$, $x=0$, где $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

59. $y=\sin x$, $y=0$, где $2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y=0$, 2) $x=0$, 3) $x=\pi$, 4) $y=-2$;

60. $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $x=0$, 2) $y=0$, 3) $x=-1$, 4) $y=1$;

61. $y=\dfrac{4}{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

62. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y.

Вычислить длину дуги кривой:

63. $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=1$;

64. $y=\ln\cos x$, отсеченной прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$;

65. $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$;

66. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x=-1$;

67. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ между осью y и прямой $x=a$;

68. $y=x^2-1$, отсеченной осью x;

69. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$;

70. астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

71. одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

72. кардиоиды $r=4(1-\cos\varphi)$;

73. первого завитка спирали $r=a\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$;

74. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$.

75. Найти статические моменты относительно осей x и y однородных пластинок, имеющих форму, указанную на рис. 7—12. Масса пластинок m.

76. Найти координаты центров тяжести однородных площадок, ограниченных линиями:

а) $y=0$, $y=\cos 2x$, $x=0$, где $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$;

б) $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\sin 3x$, где $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$;

в) $y=0$, $x=\pi$, $y=\sin\frac{x}{2}$, где $0\leqslant x\leqslant\pi$.

77. Найти координаты центров тяжести однородных пластинок, имеющих формы, указанные на рис. 7—12.

78. Найти координаты центра тяжести однородного прямого кругового конуса. Высота конуса h, радиус основания R.

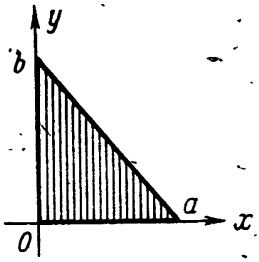

Рис. 7

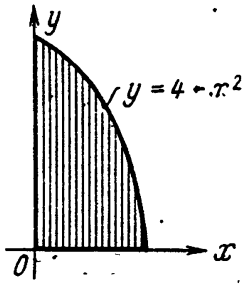

Рис. 8

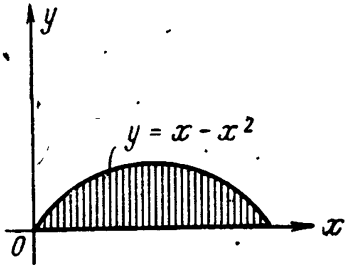

Рис. 9

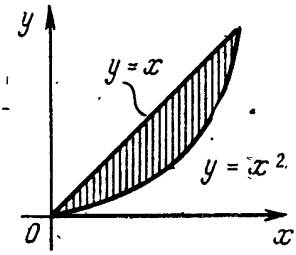

Рис. 10

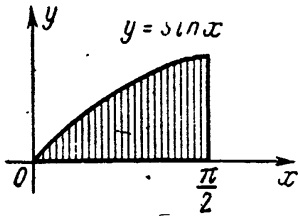

Рис. 11

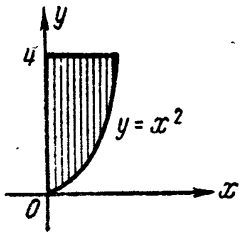

Рис. 12

79. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму полукруга. Радиус круга R.

80. Найти координаты центра тяжести однородного полушара. Радиус шара R.

81. Найти координаты центра тяжести однородной полусферы. Радиус сферы R.

82. Найти координаты центра тяжести однородного тела, полученного вращением площадки, ограниченной линиями $y=9-x^2$, $y=0$, где $x\geqslant 0$, вокруг оси y.

83. Найти координаты центров тяжести однородных тел, полученных вращением площадок, изображенных на рис. 8, 10, 11, 13, 15 ($b=2$, $c=a=1$), 17 ($c=2$, $b=1$), вокруг оси y и, на рис. 19, вокруг оси x.

84. Найти моменты инерции однородных пластинок, изображенных на рис. 18, 12, относительно оси x; на рис. 20 — относительно оси AC; на рис. 14 — относительно оси y.
Массы пластинок m.

85. Найти момент инерции однородного кругового цилиндра относительно его оси. Масса цилиндра m, радиус основания R.

86. Найти момент инерции однородного шара относительно его диаметра. Радиус шара R. Масса шара m.

87. Найти момент инерции однородной сферы относительно ее диаметра. Масса поверхности сферы m, радиус R.

88. Найти момент инерции однородного прямого кругового конуса относительно его высоты. Масса тела m, радиус основания R.

89. Найти моменты инерции относительно оси y однородных тел, полученных вращением вокруг оси y площадок, указанных на рис. 10—14, 15 ($a=c=1$, $b=2$), 17, 18*.

90. Найти момент инерции однородной боковой поверхности прямого кругового конуса относительно его высоты. Масса боковой поверхности m, радиус основания R.

91. Вычислить работу, которую надо затратить на выкачивание воды из резервуара, имеющего форму:
а) полушара. Радиус шара R;

* В задаче 89 (рис. 18) обозначить $a-b=r$, $a=R$.

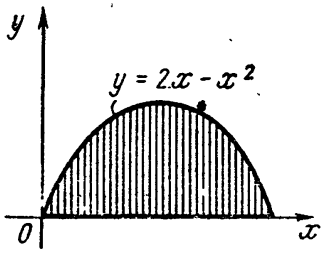

Рис. 13

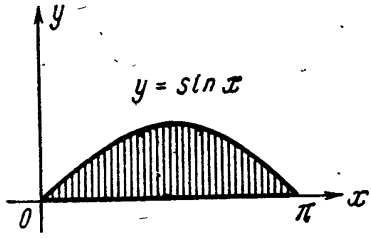

Рис. 14

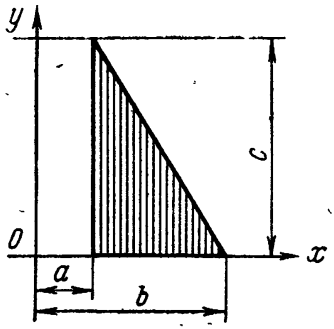

Рис. 15

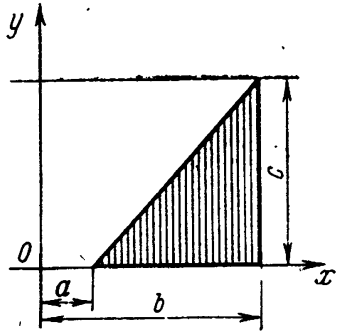

Рис. 16

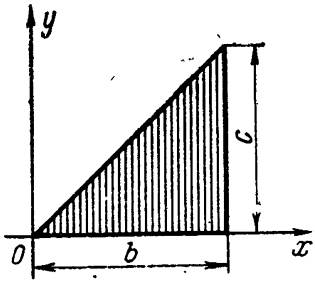

Рис. 17

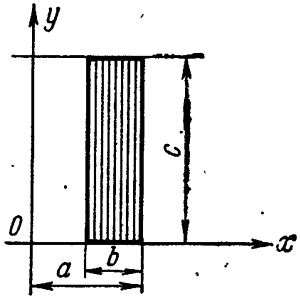

Рис. 18

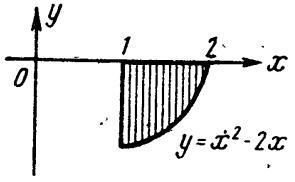

Рис. 19

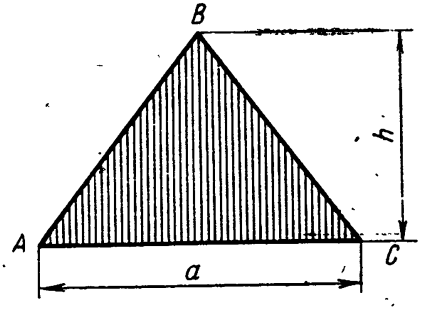

Рис. 20

б) прямого кругового конуса. Радиус основания конуса R, высота H;

с) прямого кругового цилиндра. Радиус основания цилиндра R, высота H.

Вес жидкости в каждом резервуаре равен P*.

92. Под поршнем под давлением P_0 в цилиндре находится газ объемом V_0. Вычислить работу, которую надо затратить для уменьшения объема газа в 2 раза при постоянной температуре.

8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вычислить:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$;
2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$;
3. $\int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$;
4. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arcctg} x\,dx$;
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$;
6. $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$;
7. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$;
8. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$;
9. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;
10. $\int_0^1 \ln x\,dx$;
11. $\int_0^1 \ln^2 x\,dx$;
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx$;
13. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$;
14. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$;
15. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$;
17. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$;
18. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$.

* В задаче 91 в пунктах а) и б) разобрать два случая.

9. Вычислить площадь, заключённую между локоном

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

и асимптотой этой кривой.

10. Вычислить площадь, заключенную между кривой

$$y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

и ее асимптотой (при $x \geqslant 0$).

11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси y площади, заключенной между линиями $xy=2$, $y=1$, $x=0$.

12. Определить объем тела, образованного вращением кривой $y=xe^{-\frac{x}{2}}$ (при $x \geqslant 0$) вокруг ее асимптоты.

РЯДЫ

9. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Определить порядки следующих бесконечно малых относительно $\alpha(x) = x$ при $x \longrightarrow 0$:

1. $x \sin 3x$;
2. $x^2 \cos x$;
3. $x \ln(1+2x)$;
4. $\frac{x^5}{x^7+1} \arcsin x$;
5. $\frac{\sqrt{x}}{1+x} \operatorname{arctg} x$;
6. $(\sqrt[5]{1+x}-1)^{10} \cdot \cos \pi x$;
7. $\ln \frac{1+x}{1-x}$;
8. $\sqrt{x} \cdot \ln \frac{1+2x}{1-3x}$;
9. $\operatorname{tg} x - \sin x$;
10. $(\sqrt[4]{1+x^2}-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;
11. $(2^x-1)\ln(1+\sin 5x)$;
12. $(e^{x^2}-1)\ln(e^x+1)$;
13. $(3^x-1)\ln\cos 2x$;
14. $\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{x}{3}$;
15. $e^{-x^2}-\sqrt{1-x^2}$;
16. $\sin x^2 - \cos x + e^x$;
17. $\ln(1+3x)-3x$;
18. $\sin^2 x - \ln(1+x^2)$;
19. $\sqrt[5]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}-$ $-\cos x + 2^x$;
20. $\sqrt[5]{1+\ln^2(1+x^2)}-\cos x^2$;
21. $e^{x^3}-1-x^3$;
22. $\ln^2(1+x)-e^{x^2}+1$;

23. $\sin^3 x \cdot \ln \dfrac{x+1}{3x+1}$;

24. $(\sqrt[7]{1-2x}-1)^{100} \cdot \operatorname{arctg} x$;

25. $(5^x - 3^x) \cdot (\cos 5x - \cos 3x)$;

26. $\ln \dfrac{1-3x}{1+x^2} + 3x$;

Определить порядки следующих бесконечно малых относительно $\dfrac{1}{n}$ при $n \longrightarrow +\infty$:

27. $\dfrac{n+1}{n^{10}+\sqrt{n}}$;

28. $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^5+1}$;

29. $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt[3]{n}+1}$;

30. $\sqrt[3]{\dfrac{n}{n^2+1}} \cdot \sin \dfrac{1}{n}$;

31. $\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;

32. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{n+1}{n-1}$;

33. $\dfrac{1}{n^{10}} \ln \dfrac{3n-2}{3n+1}$;

34. $\operatorname{arctg} n \ln \dfrac{n+5}{n-4}$;

35. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}$;

36. $\left(2^{\frac{1}{n}} - 2 + 2^{-\frac{1}{n}}\right)^3$;

37. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}} - \sqrt[5]{\ln \dfrac{n+1}{n}}$;

38. $\left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^3$;

39. $\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$;

40. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) - \sin \dfrac{1}{n^2}$;

41. $\dfrac{1}{n^\alpha} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

10. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Доказать непосредственно сходимость рядов и найти их суммы:

1. $1+q+q^2+q^3+\ldots, |q|<1$;

2. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$;

3. $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots$;

4. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$;

5. $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \ldots$;

6. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$;

7. $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\ldots;$

8. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9^2}+\frac{3}{9^3}+\frac{4}{9^4}+\ldots;$

Исследовать сходимость рядов:

11. $1-1+1-1+\ldots;$

12. $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+$

$+\frac{1}{1000}+\ldots;$

13. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots;$

14. $\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\ldots;$

15. $\frac{1}{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+$

$+\frac{1}{\sqrt[4]{e}}+\ldots;$

16. $\frac{1}{101}+\frac{2}{104}+$

$+\frac{3}{109}+\frac{4}{116}+\ldots;$

17. $\frac{1}{13}+\frac{2}{16}+\frac{3}{19}+\frac{4}{22}+\ldots;$

18. $\frac{(1!)^2}{3!}+\frac{(2!)^2}{5!}+\frac{(3!)^2}{7!}+$

$+\frac{(4!)^2}{9!}+\ldots;$

9. $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots;$
$|a|<1.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+$
$+\sqrt{n}).$

19. $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+$

$+\frac{2^4\cdot 4!}{4^4}+\ldots;$

20. $\frac{4\cdot 1!}{1}+\frac{4^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{4^3\cdot 3!}{3^3}+$

$+\frac{4^4\cdot 4!}{4^4}+\ldots;$

21. $\frac{\sqrt{1!}}{3}+\frac{\sqrt{2!}}{3^2}+\frac{\sqrt{3!}}{3^3}+$

$+\frac{\sqrt{4!}}{3^4}+\ldots;$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\sin\frac{1}{n^2};$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2};$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\sin n};$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n};$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^3+5};$

27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^5};$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+1)^2}$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^5+1}{n^5}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{10^n - n}$;

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sin \frac{\pi}{n}$;

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n!}$;

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{2n+5}$;

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[7]{n} \left(\ln \cos \frac{1}{n}\right)^2$;

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$;

37. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-\sqrt{n}}$;

38. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt[3]{n}}$;

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}$;

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n!}$;

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$;*

42. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^2}}$;

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 2 + a^{-\frac{1}{n}}\right)$, $a > 0$, $a \neq 1$;

44. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$;

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{5^n}$;

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n-1}\right)^n$;

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \arccos \frac{1}{n}$;

48. $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^n$;

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{\frac{1}{n}}$;

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}$.

* Применить формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} q_n$, где $q_n \to 1$ при n

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$;

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+3})$;

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$;

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^*}{3^n \cdot n!}$;

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

58. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^3}} - 1\right)$;

59. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{3^n}$;

60. $\sum_{n=2} \sqrt{n} \cdot \ln\frac{n+1}{n-1}$;

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$;

62. $\sum_{n=2} \frac{1}{n - \ln n}$;

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$;

64. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \ln\frac{n\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}-1}$;

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{7}{n}\right)^{n^2}$;

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{1}{n^\alpha} - \ln\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)$;

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$;

68. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$;

69. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$;

70. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 n}$, $\alpha \neq 0$;

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right]$;

72. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\ln\cos\frac{3}{n}}\right)^n$;

73. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$;

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{[(2n+1)!]^{\frac{3}{2}}}$

* $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$;

76. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{n+2}$;

78. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{\sqrt[8]{n}(n+1)}$;

79. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$;

80. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$;

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$;

82. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{10} e^{-n}$;

83. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{3n+2}$;

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1000n+1}$;

85. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$;

86. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^3 n}$;

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \operatorname{arctg} n}$;

88. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$;

89. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n^2+1}}$;

90. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

11. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определить область сходимости следующих функциональных рядов:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

2. $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$;

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n$, $a \neq 0$;

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{nx}-1}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^n$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[5]{n}}\left(\frac{1+2x}{4+x}\right)^n$;

11. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{\sqrt[5]{n}(n+1)} \times \left(\frac{x}{3x-1}\right)^n$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\left(\frac{2+3x}{3+x}\right)^n$;

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-\ln n}\left(\frac{1+x}{3+2x}\right)^n$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$;

16. $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln x}$;

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x+1)^n}$;

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ *;

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}-\ln n}$;

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n+2}$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$;

* Использовать формулу Стирлинга для исследования сходимости на концах интервала сходимости.

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{x}{a^n}$, $a>1$;

29. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin\frac{x}{a^n}$, $a>1$;

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{a^{nx}}$, $a>1$;

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{n}+1)^n}$;

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} x^n$;

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$;

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(2n+1)!!}$ *;

36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$;

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n+5}$;

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 10^n}$;

39. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}x^n$;

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^n$;

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+5}\right)^n$.

Исследовать последовательности и ряды на равномерную сходимость в указанных промежутках:

42. $f_n(x)=x^n$; а) $0\leqslant x\leqslant q$, $q<1$; б) $0\leqslant x\leqslant 1$.

43. $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$; а) $q\leqslant x\leqslant 1$, $q>0$; б) $0\leqslant x\leqslant 1$; в) $0<x<$

44. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $0\leqslant x\leqslant 1$

45. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; а) $0\leqslant x\leqslant 1$; б) $0<x<1$

в) $0\leqslant x\leqslant q$, $q<1$.

46. $f_n(x)=x^n-x^{3n}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

47. $f_n(x)=x^{2n}-x^{3n}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

48. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$, $0<x<+\infty$.

---

* Использовать формулу Стирлинга для исследования сходимости на ко цах интервала сходимости.

49. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < +\infty$.

50. $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$; а) $-\infty < x < +\infty$; б) $10 \leqslant x \leqslant 100$.

51. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$; а) $0 \leqslant x \leqslant q$, $q < 1$; б) $l \leqslant x < +\infty$, $l > 1$; в) $0 \leqslant x < 1$; г) $1 < x < +\infty$.

52. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$, $0 < x < 1$.

53. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; а) $0 < x < +\infty$; б) $1 < x < +\infty$.

54. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $0 < x < 1$.

55. $f_n(x) = nxe^{-nx}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $1 \leqslant x < +\infty$.

56. $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $1 \leqslant x < +\infty$.

57. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

58. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$; а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$; в) $2 \leqslant x < +\infty$.

59. $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2n}, \\ n\left(\dfrac{1}{n} - x\right), & \dfrac{1}{2n} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $q \leqslant x \leqslant 1$, $q > 0$.

60. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right), & \dfrac{1}{n} \leqslant x < \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \dfrac{2}{n} \leqslant x; \end{cases}$

$0 \leqslant x \leqslant 1$.

61. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; а) $-q < x < q$, $0 < q < 1$; б) $-1 < x < 1$;

62. $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

63. $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

64. $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)\left(\frac{x}{2}\right)^n$, $0 < x < 2$;

65. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$, $0 < x < +\infty$;

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

67. $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0 < x < +\infty$;

68. $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n+1} + x^{2n+2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{(2n+1)x}{n(n+1)} \cdot \sin\frac{x}{n(n+1)}$, $-\infty < x < +\infty$;

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов в указанных промежутках *:

70. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $0 \leqslant x \leqslant q$, $q < 1$;

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n^2+1}}$, $-\infty < x < +\infty$;

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^5}$, $-\infty < x < +\infty$;

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + e^n}$, $0 < x < +\infty$;

* Другими словами — доказать правильную сходимость.

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1+nx}}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

77. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n}+nx}}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

78. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n^3+1}$, $-\infty < x < +\infty$;

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n\sqrt{n+7}}$, $-\infty < x < +\infty$;

80. $\sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $-\infty < x < +\infty$;

Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти суммы рядов:

84. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$;

85. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$;

86. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$;

87. $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \ldots$;

88. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \ldots$;

89. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$;

90. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$;

91. $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots$;

92. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$;

93. $1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \cdots$.

12. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Написать разложения следующих функций в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости:

1. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
2. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
3. a^x; $a > 0$, $a \neq 1$;
4. $x^2 e^{-2x}$;
5. $\sin x^2$;
6. $\sin^2 x$;

7. $\cos^2 x$;

8. $\sin^3 x$;

9. $\dfrac{1}{1-x^2}$;

10. $\dfrac{1}{1+x^4}$;

11. $\dfrac{1}{1+2x}$;

12. $\dfrac{3}{4-x}$;

13. $\dfrac{1}{3+2x}$;

14. $\dfrac{1}{2+3x^2}$;

15. $\dfrac{5x-1}{x^2-5x+6}$;

16. $\dfrac{2x+3}{x^2-4x+3}$;

17. $\dfrac{x-7}{6-x-x^2}$;

18. $\ln(1-x^2)$;

19. $\ln\sqrt[5]{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

20. $\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$;

21. $\ln(1+5x)$;

22. $\ln(5+2x)$;

23. $\ln(1+2x^2)$;

24. $\ln\dfrac{2x+1}{3x+1}$;

25. $\ln(x^2-5x+4)$;

26. $\ln(x^2-10x+9)$;

27. $\ln(6+x-x^2)$;

28. $\ln(1-x+x^2)$;

29. $\ln(1+x+x^2)$;

30. $\sqrt{1+x^2}$;

31. $\sqrt[5]{1+x}$;

32. $\sqrt[3]{27+x}$;

33. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

34. $\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$;

35. $x\arcsin x$;

36. $x^2\operatorname{arctg} x$;

37. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

38. $\operatorname{arcsin} 3x$;

39. $\ln(3x+\sqrt{1+9x^2})$;

40. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$;

41. $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$;

42. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^x-1}{x}\,dx$;

43. $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

Написать разложения следующих функций в ряд Тейлора и найти интервалы сходимости:

44. x^3-x по степеням $x+1$;

45. e^x по степеням $x+2$;

46. $\frac{1}{x}$ по степеням $x+3$;

47. $\sqrt{x}$ по степеням $x-4$;

48. $\sqrt[3]{x}$ по степеням $x+1$;

49. $\frac{1}{2-x-x^2}$ по степеням $x+3$;

50. $\frac{1}{x^2+3x+2}$ по степеням $x+4$;

51. $\ln x$ по степеням $x-1$;

52. $\sin 3x$ по степеням $x+\frac{\pi}{3}$;

53. $\sin\frac{\pi x}{4}$ по степеням $x-2$;

54. $\sin\frac{\pi x}{3}$ по степеням $x-1$.

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 0,001;

55. $\sqrt[3]{10}$;

56. $\sqrt{e}$;

57. $\sqrt[3]{30}$;

58. $\sin 18°$;

59. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

60. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

13. РЯДЫ ФУРЬЕ

В задачах этого параграфа требуется разложить каждую из заданных функций в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

В каждой из задач указано, какое l требуется взять.

Разложить в ряд Фурье при $l=\pi$ следующие функции:

1. $f(x)=\sin^3 x$;
2. $f(x)=\cos^3 x$;
3. $f(x)=\sin^4 x$;
4. $f(x)=\cos^4 x$.

Разложить в ряд Фурье при $l=\pi$ в указанных интервалах следующие функции:

5. $f(x)=x, \quad -\pi<x<\pi$;
6. $f(x)=|x|, \quad -\pi<x<\pi$.

Применив найденное разложение, вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

7. $f(x)=\operatorname{sgn} x, \quad -\pi<x<\pi$.

Применив найденное разложение, вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

8. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, \quad 0<x<2\pi$;

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\leqslant 0, \\ 1, & 0<x<\pi; \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\leqslant 0, \\ x, & 0<x<\pi; \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi<x\leqslant 0, \\ 0, & 0<x<\pi; \end{cases}$

12. $f(x)=x^2, \quad -\pi<x<\pi$.

Применив найденное разложение, вычислить суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

13. Разложить в ряд Фурье при $l=2$ следующие функции:

а) $f(x)=\begin{cases} 3, & 0<x\leqslant 2, \\ 0, & 2<x<4; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x\leqslant 2, \\ -2, & 2<x<4. \end{cases}$

Следующие периодические функции разложить в ряд Фурье, взяв l, равное половине наименьшего положительного периода соответствующих функций:

14. $f(x)=\operatorname{sgn}\sin x$;

15. $f(x)=|\sin x|$;

16. $f(x)=|\cos x|$;

17. $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$;

18. $f(x)=x-[x]$.

Разложить в ряд Фурье, считая $l=\pi$, следующие функции: а) по косинусам кратных дуг, б) по синусам кратных дуг:

19. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-x, \quad 0<x<\pi$;

20. $f(x)=\pi-x, \quad 0<x<\pi$;

21. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}, \quad 0<x<\pi$;

22 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}, \quad 0<x<\pi$.

23. Разложить в ряд Фурье, считая $l=1$: а) по косинусам кратных дуг, б) по синусам кратных дуг

$$f(x)=1-x, \quad 0<x<1.$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Какие поверхности изображают следующие уравнения:

1. $x+y+z-1=0$;
2. $3x-4y+5z-2=0$;
3. $2x+3y-4z-12=0$;
4. $2x-z+4=0$;
5. $x+y=0$;
6. $3x+2=0$;
7. $2z+3=0$;
8. $x+y+z=0$;
9. $2x+7y-6z=0$;
10. $2y+11z=0$;
11. $x+4y-2z-20=0$;
12. $x^2+y^2=4$;
13. $x^2+y^2=2x$;
14. $xy=4$;

15. $z=y^2$;

16. $y=z^2$;

17. $z=e^{-x^2}$;

18. $z^2=x^2-4$;

19. $y=x^3$;

20. $x^2+y^2+z^2+2x+6y+2z=0$;

21. $x^2+y^2+z^2-6x-4y=0$;

22. $x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z$;

23. $x^2+y^2=z$;

24. $x^2+y^2+z^2=z$;

25. $x^2+z^2=y+2$;

26. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z$;

27. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$;

28. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{16}=1$;

29. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

30. $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$;

31. $x^2+y^2-z^2=0$;

32. $x^2+z^2=4y^2$;

33. $x^2+y^2-z^2+1=0$;

34. $x^2+z^2-y^2=4$;

35. $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1$;

36. $x^2-y^2-z^2=25$;

37. $2z=y^2-x^2$;

38. $2y=z^2-x^2$;

39. $z=\sqrt{x}$.

Написать уравнения поверхностей, образованных вращением следующих кривых вокруг указанных осей:

40. $y=x$, $z=0$ вокруг $0x$;

41. $x=z^2$, $y=0$ вокруг $0x$;

42. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$, $y=0$, а) вокруг $0x$; б) вокруг $0z$;

43. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$ вокруг $0y$;

44. $y^2+z^2=a^2$, $x=0$ вокруг $0y$;

45. $z=\frac{1}{1+x^2}$, $y=0$ вокруг $0z$;

46. $y=e^{-x^2}$, $z=0$ вокруг $0y$;

47. $z=\frac{1}{x^2}$, $y=0$ вокруг $0z$;

48. $y=\sqrt{x}$, $z=0$ вокруг $0y$.

Найти области определения функций, заданных следующими формулами:

49. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

50. $z = \sqrt{9 - x^2}$;

51. $z = \dfrac{1}{x + y}$;

52. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

53. $z = \sqrt{2xy}$;

54. $z = \sqrt{x} + y$;

55. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$;

56. $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$;

57. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$;

58. $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$;

59. $z = \arcsin \dfrac{y}{x^2}$;

60. $z = \ln(x + y)$;

61. $u = \ln(z^2 - x^2 - y^2 - a^2)$;

62. $u = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 + z^2}}$.

Построить линии уровня следующих функций:

63. $z = x^2 + y^2$;

64. $z = 4x^2 + y^2$;

65. $z = x + y$;

66. $z = y^2 - x^2$;

67. $z = y - e^x$;

68. $z = \dfrac{1}{3x^2 + 2y^2}$.

Найти поверхности уровня следующих функций:

69. $u = x^2 + y^2 + z^2$;

70. $u = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2$;

71. $u = x^2 - y^2 + z^2$.

Найти частные производные и дифференциалы первого порядка следующих функций:

72. $z = xy$;

73. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

74. $z = \sin xu^2$;

75. $z = \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$;

76. $z = \ln(x + 5y^2)$;

77. $z = y^x$;

78. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{\sqrt{x}}$;

79. $z = xy \cos xy$,

80. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

81. $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{x-y}$;

82. $z = \arccos \dfrac{x-y}{2x+y}$;

83. $z = e^{\sin^2(x^2+y^2)}$.

В задачах 84—87 считать, что $x=x(t)$, $y=y(t)$, и найти $\dfrac{dz}{dt}$:

84. $z=xe^y$;

85. $z=x^y$;

86. $z = \sin \dfrac{y}{x}$;

87. $z = \ln \sin (x^2+y^2)$.

Найти частные производные второго порядка:

88. $z=f(x\cdot y)$;

89. $z = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, считая, что $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$:

90. $z = e^{x^2/y}$;

91. $z = \sqrt{x}\cdot \ln y$.

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

92. $z=f(x, y)$, $x=u+v$, $y=u^2-v^2$;

93. $z=f(x, y)$, $x=uv$, $y=\dfrac{u}{v}$.

Найти частные производные третьего порядка:

94. $z=x^4+5y^3+3x-y$;

95. $z=\sin(3x-2y)$;

96. $z = \dfrac{x}{y}$;

97. $z=f(x^2-y^2)$.

Проверить, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций:

98. $z = \dfrac{x^2}{y^2}$;

99. $z=\ln(x-2y)$;

100. $z = \dfrac{x^2}{1-y}$;

101. $z = x^2 \sin y$;

102. $z = y^{x^2}$;

103. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Найти d^2z:

104. $z = e^{3x-2y}$;

105. $z = \sin(x^2+y^2)$;

106. $z = y \ln x$;

107. $z = x \ln \frac{y}{x}$;

108. $z = \sqrt{x^2+y^2}$;

109. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Найти d^3u

110. $u = xyz$.

Найти d^3z.

111. $z = f(x^2+y^2)$.

Найти $d^n z$

112. $z = e^{ax+by}$;

113. $z = \ln(x+y)$.

114. Найти производную по направлению функции $z = x^2+y^2$ в точке M (1,1). Рассмотреть случаи, когда направление составляет с $0x$ угол: а) $\frac{\pi}{3}$, б) $\frac{\pi}{6}$, в) $\frac{\pi}{2}$.

115. Найти производную по направлению функции $z = \ln(e^x+e^y)$. Рассмотреть направление, параллельное биссектрисе первого координатного угла.

116. Найти производную по направлению функции

$$u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2$$

в точке M (2, 3, 1). Рассмотреть случаи, когда направление совпадает: а) с направлением радиуса-вектора этой точки; б) с направлением вектора $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

Найти $\overline{\text{grad}}\, u$ и $|\overline{\text{grad}}\, u|$

117. $u = x^2+y^2-z^2$ в точке M (1, —1, 2);

118. $u = 4-x^2-y^2+z^2$ в точке M (3, 2, 1);

119. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M(—1, 2, 0);

120. $u = xyz$ в точке M (3, —1, 2).

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям:

121. $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ в точке M(1, 2, 2);

122 $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ в точке M(2, 3, 2);

123. $z=xy$ в точке M (3, 4, 12);

124. $z=x^2-y^2$ в точке M (5, 4, 9);

125. $z=x^2+y^2$ в точке M (1, 2, 5);

126. $x^2+y^2+z^2=26$ в точке M (3, 4, 1);

127. $x^2+y^2-z^2=1$ в точке M (1, 2, 2);

128. $x^2-y^2-z^2=1$ в точке M (3, 2, 2).

129. К поверхности $3x^2+2y^2+z^2=21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $6x-4y-z=0$.

130. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ $(a>0)$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

131. Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a} \qquad (a>0)$$

отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна

Найти экстремум функций:

132. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$,

133. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$;

134. $z=xy\,(1-x-y)$;

135. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$,

136. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$;

137. $z=x^3-y^3-3xy$;

138. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$

$$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2};$$

139. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$

$$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Проверить, будут ли указанные функции решениями следующих уравнений *:

1. $y=c_1+c_2e^{-9x}$, $y''+9y'=0$;
2. $y=c_1\cos 5x+c_2\sin 5x$, $y''+25y=0$;
3. $y=c_1x$, $y'x-y=0$;
4. $y=\sin x$, $y'-y=0$;
5. $y=-5\ln x+c_1x^2+c_2x+c_3$, $y'''=\dfrac{5}{x^2}$.

Составить дифференциальные уравнения семейства линий:

6. $y=cx$;
7. $y=x^2+cx$;
8. $cy=x^2+y^2$;
9. $y=ce^{2x}$;
10. $y=c_1e^x+c_2x$.

Построить изображения полей направлений, определяемых каждым из уравнений:

11. $y'=x$;
12. $y'=x^2$;
13. $ydy+xdx=0$;
14. $y'=y+x^2$;
15. $y'=2x^2+y^2$;
16. $(y')^2=x^2+y^2$.

Решить уравнения. Если даны начальные условия, найти частные решения:

17. $2dy-xdx=0$, $x_0=2$, $y_0=0$;
18. $(2x+5)dy+ydx=0$, $x_0=0$, $y_0=1$;
19. $yx-y'=0$, $x_0=0$, $y_0=10$;
20. $yy'=3$, $x_0=6$, $y_0=10$;
21. $y'-(2x+2)\sqrt{1-y^2}=0$, $x_0=0$, $y_0=1$;
22. $y\,dy-x\,dx=0$, $x_0=3$, $y_0=5$;
23. $y'\sqrt{1+x^2}-y=0$, $x_0=0$, $y_0=4$;
24. $y'x+\sqrt{4-y^2}=0$, $x_0=1$, $y_0=0$;
25. $y'(4+x^2)+y^2=0$, $x_0=2$, $y_0=\dfrac{8}{\pi}$;

* c, c_1, c_2, c_3 — постоянные.

26. $y'(4-x^2)-4y=0$,
$x_0=0,\ y_0=5$;

27. $\sqrt{x}\,dy-ydx=dx$,
$x_0=0,\ y_0=0$;

28. $\sqrt{1-x^2}y'+x\sqrt{9-y^2}=0$.
$x_0=0,\ y_0=0$;

29. $y'-2xy-y=0$,
$x_0=0,\ y_0=\sqrt{3}$;

30. $3xdx-2xdy=dx+dy$;

31. $\sqrt{9-x^2}\,dy-ydx=0$,
$x_0=\frac{3}{2},\ y_0=1$;

32. $dy-2ydx=dx$,
$x_0=\ln 2,\ y_0=\frac{5}{2}$;

33. $2dy-(1+4y^2)dx=0$,
$x_0=\frac{\pi}{12},\ y_0=-\frac{1}{2}$;

34. $\sqrt{x^2-4x+8}\,y'-$
$-\sqrt{16-y^2}=0$;

35. $x\sqrt{25-y^2}-e^{-x}y'=0$,
$x_0=0,\ y_0=0$;

36. $(y-4)dx+(x+3)dy=0$;

37. $y'\sec 5x-5y=0$,
$x_0=\pi,\ y_0=\frac{1}{5}$;

38. $\sqrt{2+y}\operatorname{cosec}^2 x-y'\cos^2 x=0$,
$x_0=\frac{\pi}{4},\ y_0=2$;

39. $xdy+ydx=\sin x dx$,
$x_0=\frac{\pi}{2},\ y_0=\frac{2}{\pi}$;

40. $xdy-ydx=y^2\ln x\,dx$;

41. $xdy+ydx+e^x dx=0$;

42. $e^x dy+ye^x dx=\sin 2x\,dx$;

43. $2xy\,dx+x^2dy=\cos x\,dx$;

44. $xdy-ydx=\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

45. $xdy-ydx=x^2\sqrt{4+x^2}\,dx$;

46. $xy'=y+\sqrt{25x^2-y^2}$;

47. $2x^2y'=3x^2+6xy+y^2$;

48. $x^2dy=(x^2+y^2+xy)dx$;

49. $y'=\operatorname{tg}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$;

50. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$;

51. $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$;

52. $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$;

53. $y'\sin x-y=\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}$;

54. $y'-5x^4y=e^{x^5}$;

55. $xy'-y=x\sqrt{x}$;

56. $\sqrt{1-x^2}\,(xy'+y)=1$.

57. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$.

58. $xy'+y=\ln x+1$;

59. $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$;

60. $y'x+y+xy^2=0$;
61. $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0$;
62. $y'+xy=xy^3$;
63. $xy'+y=y^2\ln x$;
64. $y'+2xy=2x^3y^3$;
65. $y'+y=xy^{1-n}$;
66. $y^{(4)}=x$;
67. $y''=\ln x$;
68. $y''=\sin 2x$;
69. $xy''-2y'=0$;
70. $y'y''+x=0$;
71. $xy''+y'=0$;
72. $xy''-y'=0$;
73. $y''+9y=0$;
74. $y''-9y=0$;
75. $y''+(y')^3e^y=0$;
76. $y''(y-4)=(y')^2$;
77. $y''\cos x+y'\sin x=1$;
78. $x^5y''+x^4y'+3=0$;
79. $y''\operatorname{tg} y=2(y')^2$;
80. $xy''-y'=x^2e^x$;
81. $x^2y''=(y')^2+xy'-x^2$;
82. $xy''-y'\ln\frac{y'}{x}=0$;
83. $y''\operatorname{tg} x+y'=1$;
84. $xy''-y'=x^2$;
85. $xy''=y'+5$;
86. $y''-y'e^y=0$;
87. $y''-y'=0$;
88. $y''+25y=0$;
89. $y''+25y'=0$;
90. $y''-8y=0$;
91. $y''-25y=0$;
92. $y''-2y'+y=0$;
93. $y''-6y'+9y=0$;
94. $y''+4y'+10y=0$;
95. $y'''-5y''+8y'-4y=0$;
96. $y''+100y=0$;
97. $y'''+y''=0$;
98. $y''-20y'+19y=0$;
99. $y^{(4)}-y''=0$;
100. $2y''-3y'-2y=0$;
101. $y''+7y'+6y=0$;
102. $y''+6y'+10y=0$;
103. $y''+3y=0$;
104. $y''+4y'+13y=0$;
105. $y''-2\sqrt{3}\,y'+7y=0$;
106. $y''+y'-12y=0$;
107. $y''+4y'+4y=0$;
108. $y''-4y'-7y=0$;
109. $y''+9y'-10y=0$;
110. $y''+10y'+100y=0$;
111. $y''+7y'+2y=0$;
112. $y''+4y'=0$;
113. $y'''+3ay''+3a^2y'+a^3y=0$;
114. $y'''-2y'=0$;
115. $y^{(4)}+9y''=0$;
116. $y^{(4)}-16y=0$;
117. $y'''+y=0$;
118. $y''+y'=e^x$;

119. $y''-4y'=4e^{4x}$;

120. $y''+3y'+2y=3e^{2x}$;

121. $y''+7y'+20y=e^{x}$;

122. $y''+y'+10y=3x^{2}$;

123. $y''+y'+y=3\cos 2x$;

124. $y''+3y'+2y=5e^{5x}$;

125. $y''+y=\sin 5x$;

126. $y''+y=\cos x$;

127. $y''+9y=\cos 3x$;

128. $y''+y'-2y=2e^{-2x}+e^{2x}$;

129. $y''-9y=e^{2x}$,

130. $y''-6y'+9y=e^{3x}$;

131. $y''-y'=4+x$;

132. $y''-2y'-3y=x^{2}$;

133. $y''+y=\cos x+\sin 5x$;

134. $y''+4y'=x+e^{-4x}$;

135. $y''+100y=\sin 2x$;

136. $y''+2y'+y=e^{-x}$;

137. $y''-4y=e^{2x}+3e^{-2x}$;

138. $y''-y'-2y=\sin x+x^{2}$;

139. $y''+9y=4\sin 3x+x$;

140. $y''-3y'=x^{3}+2$;

141. $y''+3y'=1$;

142. $y''+y=x\cos x$;

143. $y''-y=xe^{x}$;

144. $y''-y'+2y=x\sin x$;

145. $y''+y'+y=x^{2}e^{x}$;

146. $y''-9y=e^{3x}$;

147. $y''+y'=xe^{x}$;

148. $y''+y'=x\sin x$.

149. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (1, 2), если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен абсциссе точки касания.

150. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M $(1, \sqrt{2})$, если угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке равен отношению абсциссы точки касания к ординате.

151. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (0, 2), если угловой коэффициент нормали равен обратной величине ординаты точки, в которой проведена нормаль к кривой.

152. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (1, 3), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке кривой втрое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

153. Написать уравнение кривой, проходящей через точку M (2, 2), если подкасательная в любой точке ее равна удвоенной абсциссе точки касания. (Подкасательной называется проекция отрезка касательной, заключенного между точкой касания и точкой пересечения касательной с осью ox).

154. Определить форму зеркала, отражающего лучи, исходящие из точечного источника света, параллельно данному направлению.

155. Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия.
Известно, что половина первоначального запаса радия распадается по истечении 1600 лет. Найти, какой процент радия окажется распавшимся по истечении 100 лет.

156. В резервуаре находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В резервуар начинает поступать каждую минуту 2 *л* воды и вытекает 1 *л* смеси. Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t минут, предполагая, что смесь перемешивается мгновенно.

157. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы тяжести. Найти закон движения точки без учета сопротивления воздуха. Написать этот закон, если даны следующие начальные условия: в момент времени $t_0=0$ точка имела скорость v_0 и до этого момента проделала путь s_0.

158. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметра 2 *м*, вытечет из нее через круглое отверстие радиуса 0,1 *м*, вырезанное в центре дна чаши, если скорость истечения жидкости $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота столба жидкости над отверстием.

159. Во сколько времени тело, нагретое до 100°, охладится до 24° в комнате с температурой 20°, если до 40° оно охлаждается за 10 минут и скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела в данный момент и температуры воздуха в комнате.

ОТВЕТЫ

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1. $(-3,3)$. 2 $[-2,2]$. 3. $(-\infty, -4), (4, +\infty)$. 4. $(-1,5)$. 5. $(-2, -1)$, 6. $[-4,2]$. 7. $[-5,5]$. 8. $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$. 9. $\left(-\infty, -\frac{7}{5}\right]$, $[-1, +\infty)$. 10, 13. Множество пусто. 11. $[-1,4]$. 12. $(0,1)$. 14. $(-\infty, 1), (10, +\infty)$. 15. $(-\infty, +\infty)$. 16. $(-\infty, +\infty)$.

17. $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right), \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$. 18. $x = 2$. 19. $\left[\frac{1}{3}, 5\right)$. 20. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ 21. $(-\infty, 2], [3, +\infty)$. 22. $(-\infty, 0), (3, +\infty)$ 23. $[-2,2]$. 24. $(-\infty, +\infty)$. 25. $(-\infty, +\infty)$. 26. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 27. $x \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$ 28. $[-1, 1]$. 29. $[-3, -1]$. 30. $(-\infty, +\infty)$. 31. $(4, +\infty)$. 32. $(-\infty, 0)$. 33. $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. 34. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 35. $(0,4)$. 36. $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 37. $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. 38. $(-\infty, 3), (3, +\infty)$. 39. $(-\infty, -4]$. $[-2, +\infty)$. 40. $(-\infty, 1), (1,4), (4, +\infty)$. 41. $-2, 0, 0, \frac{1+x-2x^2}{x^2}$, $x^2 - x - 2$, $x^2 + 3x$, $(x + \Delta x)^2 + x + \Delta x - 2$. 42. $\pi, \frac{\pi}{2}$, 0. 43, 45, 48, 53 — функции четные. 46, 47, 50, 51, 52 — функции нечетные. 44, 49, 54, 55 — функции не являются ни четными, ни нечетными. 57. $\frac{\pi}{2}$. 58. 2π. 59. 2π. 60. $\frac{\pi}{3}$. 61. 2π. 62. π. 63. $\frac{2\pi}{3}$. 64. $\frac{\pi}{2}$. 65. 3π. 66. 2π.

3. ПРЕДЕЛЫ

1. -1. 2. 10. 3. $\frac{2}{3}$. 4. 1. 5. $\frac{1}{5}$. 6. $\frac{1}{2}$. 7. 1. 8. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 9. -8. 10. $\frac{1}{6}$. 11. -12. 12. -1. 13. $-\sqrt{2}$. 14. 3. 15. $\frac{1}{2}$. 16. $-\frac{5}{2}$. 17. 0. 18. ∞. 19. $\frac{1}{3}$. 20. $\frac{1}{9}$. 21. 1. 22. 3. 23. 1. 24. -1. 25. 3. 26. 0. 27. $-\frac{1}{3}$. 28. $\sqrt{2}$. 29. -2. 30. 1. 31. $-\frac{1}{2}$. 32. 2. 33. 3. 34. $-\frac{3}{2}$. 35. $-\frac{1}{2}$. 36. 0. 37. $\frac{1}{2}$. 38. $\frac{15}{2}$. 39. $\frac{1}{2}$. 40. 0. 41. ∞. 42. $-\frac{1}{12}$.

43. $\frac{2}{9}$. 44. 3. 45. $\frac{4}{5}$. 46. $-\frac{10}{9}$. 47. 0. 48. 4. 49. 2. 50. $\frac{1}{2}$.

51. 14. 52. $\frac{1}{2}$. 53. $\frac{1}{2}$. 54. $-\frac{1}{2}$. 55. $\frac{1}{6}$. 56. 9. 57. $-2\sin\alpha$.

58. 1. 59. $\cos b$. 60. $\frac{4}{9}$. 61. 1. 62. x. 63. $\frac{n^2-m^2}{2}$. 64. $-\frac{1}{3}$.

65. $\frac{2}{3}$. 66. $\frac{5}{8}$. 67. $\frac{8}{7}$. 68. -6. 69. $\frac{184}{21}$. 70. $\frac{5}{12}$. 71. $-\frac{2\ln 2}{5}$.

72. $\frac{8}{15}$. 73. $\frac{5}{3}$. 74. $\frac{1}{6}$. 75. $\frac{3}{5}$. 76. $-\frac{1}{54}$. 77. $\frac{1}{e}$. 78. $\frac{1}{10\ln 10}$.

79. -1. 80. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. 81. $-\frac{\pi^2}{2}$. 82. $\frac{1}{2\ln 2}$. 83. 1. 84. $\ln a$. 85. $64\ln 4$.

86. $\ln\frac{3}{2}$. 87. $\frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{3}{7}}$. 88. 1. 89. 2. 90. -2. 91. $\frac{\ln 7}{6}$. 92. 2.

93. $2\frac{\ln 7}{\ln 10}$. 94. $\frac{3}{5}$. 95. $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. 96. 0. 97. $4\ln 3$. 98. $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. 99. $5^5\ln 5$.

100. $\frac{1}{5}$. 101. $-\frac{1}{2}$. 102. $\frac{1}{3\ln 2}$. 103. $\frac{1}{2e}$. 104. $\frac{1}{3\ln 3}$. 105. $\frac{5}{3}$.

106. e^2. 107. e. 108. e^{-2}. 109. e^4. 110. 1. 111. $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. 112. e^{-1}.

113. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 114. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 115. $e^{\operatorname{ctg}2}$. 116. 4. 117. -2 118. e^4.

119. e^{-2}. 120. $e\sqrt[3]{2}$. 121. $\frac{1}{e}$. 122. e^{-6}. 123. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 124. $+\infty$.

125. $e^{-\frac{1}{\pi}}$. 126. e^{-2}. 127. $-\frac{49}{2}$. 128. 3. 129. $\frac{1}{2}$. 130. -3.

131. 3. 132. -1. 133. $\frac{3}{2}$. 134. $-\frac{1}{5}$. 135. $\frac{3}{4}$. 136. $-\frac{8}{9}$

137. $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$. 138. $-\frac{2}{\ln 2}$. 139. $\frac{1}{2}$. 140. $e^{-\frac{49}{2}}$. 141. 1. 142. -1.

143. $\frac{\alpha}{\beta}2^{\alpha-\beta}$. 144. $\sqrt{e}$. 145. $\frac{8}{7}$. 146. 12. 147. $\ln 2$. 148. -5.

149. -1. 150. $-12\ln 3$. 151. $-\frac{9\ln 3}{8}$. 152. $-\frac{5}{4\ln 2}$.

153. $-160\ln 2$. 154. -1. 155. $-0{,}1$. 156. $\frac{1}{108}$. 157. $\frac{1}{3}$.

158. $-\frac{9}{\ln 3}$. 159. $2\sqrt{5}\cos 5$. 160. $\frac{\pi}{7}$. 161. $\frac{1}{7}$. 162. $\frac{1}{6\pi}$.

163. $-\frac{8\ln 2}{\pi}$. 164. $-2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. 165. $-\frac{2}{3\pi}$. 166. $-\frac{1}{\pi}$. 167. $\frac{6}{13}$.

168. $\frac{-\pi\ln 3}{6}$. 169. $y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x<1,\\ 1. & x>1.\end{cases}$ 170. $y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x\neq 1.\end{cases}$

4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. $2x$. 2. $3x^2$. 3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 4. $-\frac{1}{x^2}$. 5. $-\frac{2}{x^3}$. 6. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

7. $2\cos 2x$. 8. $-\frac{\sin\frac{x}{2}}{2}$. 9. $-\frac{2}{(2x+1)^2}$. 10. $\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$.

11. $2(2x^3+3x-1)$. 12. $49x^6+6x-4$. 13. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}$.

14. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}$. 15. $20x^4-3\cos x-\frac{5}{\sin^2 x}$. 16. $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-$

$-\frac{2}{\cos^2 x}$. 17. $8x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\cos x-\sin x+\frac{1}{x}$. 18. $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}-$

$-24x^5+\frac{5}{x}+7\sin x-\frac{4\operatorname{ctg}2x}{\sin 2x}$. 19. $\frac{\ln 24}{x\ln 2\cdot\ln 3}$. 20. $4e^x+\frac{1}{1+x^2}+$

$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 21. $e^x-\frac{1}{2}\sec^2 x+x^3$. 22. $5^x\ln 5+6^x\ln 6-7^{-x}\ln 7$.

23. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$. 24. $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$. 25. $4\operatorname{cosec}^2 2x$.

26. $\frac{2}{1+x^2}$. 27. $\sin x + x\cos x$. 28. $x(\sin 2x + x)\sec^2 x$. 29. $\frac{\ln x + 7}{7\sqrt[7]{x^6}}$.

30. $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 31. $\frac{\operatorname{arcctg} x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. 32. $x\frac{2\ln x + 1}{\ln 3}$.

33. $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$. 34. $\frac{\sin x - x^2 + x\cos x(\sin x - \ln x)}{x\sin^2 x}$. 35. $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$.

36. $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. 37. $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\sin^2 x}$.

38. $\frac{(1+x^2)(\sin x\cos x + x) - x^2\sin 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$. 39. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. 40. 1, 0, 4.

41. $\pm\frac{33}{8}$. 42. $-1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}$. 43. $-\frac{\ln 10}{2}$. 44. $0, 2e^2, -e^{-4}$.

45. 1, 2, 0, — 1. 46. $3\cos 3x$. 47. $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$.

48. $\sin(a-bx)$. 49. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 50. $\frac{-5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$

51. $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. 52. $\sin 2x$. 53. $3\sin^2 x\cos x$. 54. $-100\sin x\cdot\cos^{99} x$.

55. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. 56. $\frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}$. 57. $\operatorname{ctg} x$. 58. $-\operatorname{tg} x$. 59. $\frac{10}{\sin 10x}$

60. $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 61. $e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x$. 62. $\frac{2x-3}{x^2-3x+7}$. 63. $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$.

64. $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$. 65. $\frac{1}{3+x^2}$. 66. $\frac{x}{\sqrt{3-x^4}}$. 67. $\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(x^2+1)}$. 68. $\frac{1}{x^2-9}$.

69. $\frac{4xa^2}{a^4-x^4}$. 70. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. 71. $\frac{2}{1-4x^2}$. 72. $\sqrt{1-x^2}$. 73. $\operatorname{arctg} x$.

74. $e^x\cos x$. 75. $\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}$. 76. $3\operatorname{tg}^4 x$ 77. $3x^2\sin 2x^3$.

78. $-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{3}$. 79. $\frac{5}{8}\operatorname{tg} 2x\cdot\sec^{10} 2x$. 80. $-\sin 4x$.

81. $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. 82. $\frac{-2\cos^2 x}{\sin^3 x}$. 83. $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}-\frac{1}{x^2}$.

84. $a^{\sin x}\ln a\cdot\cos x$. 85. $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. 86. $xe^{-x}(2-x)$.

87. $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$. 88. $\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3}\left(\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\right)$. 89. $e^{\frac{1}{\cos x}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

90. $\frac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$. 91. $10^{3-\sin^3 2x}\ln 10\cdot(-3\sin 2x\sin 4x)$. 92. $2^x(\ln 2)\cos 2^x$.

93. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 94. $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$. 95. $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. 96. $\frac{2}{e^{4x}+1}$.

97. $\frac{\operatorname{ctg} x\ln\cos x+\operatorname{tg} x\ln\sin x}{(\ln\cos x)^2}$. 98. $-\frac{7\operatorname{tg} 7x}{\ln 5}$. 99. $-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\cdot\ln 7}$.

100. $\frac{2\cdot e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt{x^5}}$. 101. $-\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$. 102. $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

103. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 104. $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$. 105. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. 106. $\frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}$.

107. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. 108. $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$. 109. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

110. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. 111. $\frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$. 112. $\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

113. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$. 114. $\frac{5}{(5x+3)[1+\ln^2(5x+3)]}$. 115. $\frac{-3}{x^2+9}$.

116. $\frac{2\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$. 117 $\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$. 118. $\frac{-\sin x\cos(\cos x)}{\cos^2(\sin\cos x)}$

119. $\frac{xe^{x^2\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x}(\sin 6x-3x)$. 120. $a^{\sqrt[3]{\cos x}\cdot\operatorname{tg}^2 x}\ln a\cdot\frac{\sin x(6-\sin^2 x)}{3\cdot\cos^{\frac{8}{3}}x}$.

121. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\operatorname{tg} e^{-\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\cos^2\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}$. 122. $5\operatorname{ctg} x\cdot\ln^4\sin x$.

123. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. 124. $\frac{1}{20}\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4\sin\frac{x+3}{4}}}$.

125. $\frac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}$. 126. $\frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}$

127. $\frac{-1}{|1+x|\cdot\sqrt{2x(1-x)}}$ 128. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\arccos^2 x}}$.

129. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 130. $\frac{1}{1+x+x^2}$. 131. $\frac{9(x^2+1)}{x^4-9}$. 132. $\frac{4x-5}{x^2+5}$.

133. $\operatorname{arctg} x$. 134. $\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$. 135. $\frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{x}{1-x^2}$.

136. $x^x(1+\ln x)$. 137. $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. 138. $x^{\sin x}\cos x\ln x+$
$+x^{\sin x-1}\cdot\sin x$. 139. $(\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos x}\right)$.

140. $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$. 141. $y=-4x+8$,
$y=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$. 142. 1) $y=4x$, $y=-4x+16$; 2) $y=x-1$;
3) $y=x-\frac{2}{3}$; 4) $y=2x+1$. 143. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 144. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.
145. $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$. 146. $\frac{x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 147. $2\cos 2x$. 148. $-2\cos 2x$.
149. $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 150. $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. 151. $\frac{-4}{(2x-3)^2}$. 152. $\frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$.
153. $e^{-x}(3-x)$. 154. $-2e^x(\cos x+\sin x)$. 155. $(6-x^2)\cos x-$
$-6x\sin x$. 156. $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$. 157. $-\frac{1}{x^2}$.

158. $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 159. $\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 160. e^x.

161. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. 162. $3^x(\ln 3)^n$. 163. $m(m-1)(m-2)\ldots$

$\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ при $m>n$ и 0 при $m<n$.

164. $3^n\cdot\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 165. $e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. 166. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

167. $2^{3x}(3\ln 2)^n$. 168. $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

169. $2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 170. $\frac{-(n-1)!\,3^n}{(2-3x)^n}$. 171. $4^n\cdot n!$

172. $x\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 173. $e^x[x^3+3nx^2+$

$+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)]$. 174. $\frac{x^3-9n(n-1)}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)-$

$-\frac{2nx}{3^{n-1}}\cos\left(\frac{x}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)$.

175. $\frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$, $n\geqslant 3$. 176. $-\frac{x}{y}$. 177. $\frac{p}{y}$. 178. $\frac{-b^2x}{a^2y}$.

179. $\frac{b^2x}{a^2y}$. 180. $\frac{-y\sin^2 y}{1+x\sin^2 y}$. 181. $\frac{e^{-x}\sin y-e^{-y}\sin x}{e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x}$.

182. $\frac{2x-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}$. 183. $\frac{x+y}{x-y}$. 184. $\frac{-(1+y^2)}{y^2}$. 185. $\frac{2(x+2y)^2}{3}+$

$+\frac{y}{x}$. 186. $nx^{n-1}dx$. 187. $\sec^2 x\,dx$. 188. $3\sin 2x\sin 4x\,dx$. 189. $\frac{dx}{x}$

190. $\operatorname{sgn} x\,dx$. 191. $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$. 192. $\frac{-|x|\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

193. $\frac{-\operatorname{tg}x\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$. 194. $-2x2^{-x^2}\ln 2\,dx$. 195. 0,04.

196. 10,05; 1,02; 6,41; 2,08; 2,01. 197. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$.

198. $\frac{t^2-1}{2t}$; $\frac{1+t^2}{4t^3}$. 199. $\frac{3}{2}e^t$; $\frac{3}{4e^t}$. 200. $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; $-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$.

201. $\frac{3t^2+1}{2t}$; $\frac{3t^2-1}{4t^3}$. 202. $-\operatorname{tg} t$; $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$.

203. $\frac{1-3t}{t-3}$; $\frac{8(t+1)^3}{(t-3)^3}$. 204. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; $\frac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}$.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1. $-\frac{7}{5}$. 2. $\frac{9}{2}$. 3. 3. 4. $-\frac{1}{2}$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. -2. 7. $\frac{1}{3}$.

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 9. 0. 10. 0. 11. 0. 12. 0. 13. 2. 14. 0. 15. 3.

16. 0. 17. 1. 18. 1. 19. $\log_2 3$. 20. 4. 21. $\frac{1}{2}$. 22. $\frac{1}{6}$.

23. $-\frac{1}{5}$. 24. $-\frac{1}{6}$. 25. $\frac{1}{2}$. 26. $\frac{1}{2}$. 27. 0. 28. $\ln^2 3$.

29. $\frac{1}{128}$. 30. 1. 31. $\frac{\ln^2 2}{m(m-1)}$. 32. $\frac{2}{3}$. 33. $\frac{2}{m}$. 34. 0. 35. $e^{-\frac{1}{6}}$.

36. $\sqrt[3]{e}$. 37. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 38. $e^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$.

39. При $x=-1$ максимум $y=2$; при $x=1$ минимум $y=-2$.

40. При $x=-1$ максимум $y=\frac{5}{3}$; при $x=3$ минимум $y=-9$.

41. При $x=-3$ максимум $y=0$; при $x=-1$ минимум $y=-4$.

42. При $x=-2$ максимум $y=\frac{4}{3}$; при $x=0$ минимум $y=0$.

43. При $x=\pm 2$ максимум $y=5$; при $x=0$ минимум $y=1$.

44. При $x=-3$ минимум $y=-\frac{27}{4}$. 45. При $x=1$ минимум $y=-\frac{1}{12}$. 46. При $x=\pm 2$ минимум $y=-4$; при $x=0$ максимум $y=0$. 47. При $x=-1$ максимум $y=2$; при $x=1$ минимум $y=-2$.

48. При $x=1$ максимум $y=0{,}2$; при $x=3$ минимум $y=-5{,}4$. **49.** При $x=0$ минимум $y=-1$. **50.** При $x=0$ максимум $y=0$; при $x=\pm\frac{1}{2}$ минимум $y=-\frac{27}{8}$. **51.** При $x=-1$ максимум $y=1$. **52.** При $x=\frac{2}{3}$ максимум $y=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. **53.** При $x=2$ максимум $y=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$; $y=0$ — асимптота при $x\to+\infty$. **54.** Область определения $|x|\geqslant 1$; $y=\pm 2x$ — асимптоты. **55.** Область определения $|x|\geqslant 1$; $y=0$ — асимптота. **56.** При $x=0$ минимум $y=-1$. **57.** При $x=4$ максимум $y=1$. **58.** При $x=0$ максимум $y=0$; при $x=1$ минимум $y=-1$. **59.** При $x=1$ минимум $y=1$. **60.** $y=0$ — асимптота; при $x=2$ минимум $y=-2\sqrt[3]{2}$; при $x=-2$ максимум $y=2\sqrt[3]{2}$. **61.** При $x=\pm 2$ минимум $y=2\sqrt[3]{2}$; при $x=0$ максимум $y=2\sqrt[3]{4}$. **62.** При $x=\frac{2}{5}$ максимум $y=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$; при $x=0$ минимум $y=0$. **63.** При $x=\frac{3}{5}$ максимум $y=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$, при $x=1$ минимум $y=0$. **64.** $y=0$ — асимптота; $x=\pm 1$ — асимптоты. **65.** $y=0$ — асимптота; $x=\pm 2$ — асимптоты. **66.** При $x=1$ максимум $y=\frac{1}{2}$; при $x=-1$ минимум $y=-\frac{1}{2}$; $y=0$ — асимптота. **67.** При $x=0$ минимум $y=-1$; $y=0$ — асимптота; $x=1$ — асимптота. **68.** При $x=1$ максимум $y=1$; $y=0$ — асимптота; $x=2$ — асимптота. **69.** При $x=-1$ минимум $y=-\frac{1}{9}$; при $x=3$ максимум $y=-1$; $x=2$; $x=5$, $y=0$ — асимптоты. **70.** При $x=-2$ максимум $y=\frac{1}{9}$; при $x=2$ ми-

нимум $y=1$; $x=1$, $x=4$, $y=0$ — асимптоты. **71.** При $x=0$, $y=0$ максимум; $y=1$ — асимптота; $x=\pm 1$ — асимптоты. **72.** При $x=-1$ максимум $y=0$; $x=0$, $x=-2$, $y=1$ — асимптоты. **73.** При $x=-1$ максимум $y=2$; при $x=1$ минимум $y=0$; $y=1$ — асимптота. **74.** При $x=1$ максимум $y=2$; при $x=3$ минимум $y=0$; $y=1$ — асимптота. **75.** При $x=0$ максимум $y=-\frac{1}{3}$; при $x=2$ минимум $y=-3$; $y=-1$ — асимптота. **76.** При $x=2$ максимум $y=\frac{2}{e}$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow+\infty$. **77.** При $x=0$ максимум $y=1$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow+\infty$. **78.** При $x=0$ минимум $y=0$; при $x=2$ максимум $y=\frac{4}{e^2}$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow+\infty$. **79.** При $x=-4$ минимум $y=0$; при $x=0$ максимум $y=16$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow+\infty$. **80.** При $x=1$ максимум $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$; при $x=-1$ минимум $y=-\frac{1}{\sqrt{e}}$; $y=0$ — асимптота. **81.** При $x=-1$ минимум $y=-e$; при $x=1$ максимум $y=e$; $y=0$ — асимптота. **82.** При $x=0$ максимум $y=1$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow-\infty$. **83.** При $x=0$ максимум $y=4$; при $x=2$ минимум $y=0$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow-\infty$. **84.** При $x=-3$ минимум $y=-\frac{27}{e^3}$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow-\infty$. **85.** При $x=3$ максимум $y=\frac{27}{e^3}$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow+\infty$. **86.** При $x=1$ минимум $y=e$; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow-\infty$; $x=0$ — асимптота. **87.** При $x=3$ минимум $y=e^3$; асимптоты: $x=2$; $y=0$ при $x\longrightarrow-\infty$. **88.** При $x=2$ максимум $y=-\frac{e^2}{4}$; асимптоты: $x=1$, $y=0$ при $x\longrightarrow-\infty$. **89.** При $x=3$ минимум $y=\frac{e^3}{4}$; $x=1$ — асимптота; $y=0$ — асимптота при $x\longrightarrow-\infty$. **90.** При $x=-3$ минимум $y=\frac{e^3}{6}$; при $x=1$ максимум $y=-\frac{1}{2e}$; $x=\pm\sqrt{3}$ — асимптоты; $y=$

$=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **91.** $x=0$, $y=\pm 1$ — асимптоты; $|y|>1$. **92.** $y=\pm 1$ — асимптоты; $|y|<1$. **93.** При $x=-4$ максимум $y=-2e^4$; $x=-3$ — асимптота; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **94.** При $x=\pm 1$ максимум $y=\frac{1}{e}$; при $x=0$ минимум $y=0$; $y=0$ — асимптота; функция неотрицательна. **95.** При $x=\frac{1}{e}$ минимум $y=-\frac{1}{e}$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$. **96.** При $x=1$ минимум $y=1$; функция положительна; $x=0$ — асимптота при $x \longrightarrow 0+$. **97.** При $x=1$ минимум $y=0$; при $x=\frac{1}{e^2}$ максимум $y=\frac{4}{e^2}$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; функция неотрицательна. **98.** При $x=\frac{1}{e}$ максимум $y=\frac{1}{e^2}$; при $x=1$ минимум $y=0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; функция неотрицательна. **99.** При $x=e$ максимум $y=\frac{1}{e}$; $x=0$ — асимптота при $x \longrightarrow 0+$; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **100.** При $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ минимум $y=-\frac{1}{2e}$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$. **101.** При $x=1$ максимум $y=1$; $x=0$ — асимптота при $x \longrightarrow 0+$; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **102.** При $x=e$ минимум $y=e$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; $x=1$ — асимптота. **103.** Область существования функции $x\neq \pm 1$; $x\neq 0$; симметрия относительно начала координат; при $x=e$ минимум $y=e$; при $x=-e$ максимум $y=-e$; $x=\pm 1$ — асимптоты; $\lim\limits_{x\to 0} y=0$. **104.** При $x=\sqrt{e}$ минимум $y=-\frac{1}{2e}$; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$; $x=0$ — асимптота при $x \longrightarrow 0+$. **105.** При $x=1+\sqrt{e}$ максимум $y=\frac{1}{2e}$; $x=1$ — асимптота при $x \longrightarrow 1+$; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **106.** При $x=1$ минимум $y=0$; при $x=e^2$ максимум $y=\frac{4}{e^2}$; функция неотрицательна; $x=0$ — асимптота при $x \longrightarrow 0+$; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **107.** При $x=e^2$ максимум $y=\frac{2}{e}$; $x=0$ — асимптота при $x \longrightarrow 0+$; $y=0$ — асимптота при $x \longrightarrow +\infty$. **108.** При $x=0$ минимум $y=0$; при $x=\frac{2}{3}$ максимум $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9e^2}}$; $y=0$ — асимптота при

$x \to +\infty$. **109.** При $x=2$ минимум $y=2$; при $x=-2$ максимум $y=-2$; асимптоты: $y=\frac{x}{2}$, $x=0$. **110.** При $x=1$ минимум $y=3$; $x=0$, $y=2x$ — асимптоты. **111.** При $x=-\sqrt{3}$ минимум $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; при $x=\sqrt{3}$ максимум $y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; асимптоты: $x=1$, $x=-1$, $y=-x$. **112.** Асимптота $y=x$; симметрия относительно начала координат. **113.** При $x=3$ минимум $y=\frac{27}{4}$; $x=1$, $y=x+2$ — асимптоты. **114.** При $x=2$ минимум $y=0$; при $x=0$ максимум $y=-2$; $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$, $x=1$ — асимптоты. **115.** При $x=0$ — точка перегиба; $y=x+\frac{\pi}{2}$ — асимптота при $x \to +\infty$; $y=x-\frac{\pi}{2}$ — асимптота при $x \to -\infty$. **116.** При $x=5$ минимум $y=13\frac{1}{2}$; асимптоты: $y=x+5$, $x=1$. **117.** При $x=0$ минимум $y=0$; при $x=-4$ максимум $y=-9\frac{13}{27}$; $y=x-3$, $x=-1$ — асимптоты. **118.** При $x=1$ минимум $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; при $x=-1$ максимум $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}$; $y=\frac{x}{2}+\pi$ — асимптота при $x \to -\infty$; $y=\frac{x}{2}$ — асимптота при $x \to +\infty$. **119.** При $x=-\frac{1}{2}$ максимум $y=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; при $x=\frac{1}{2}$ минимум $y=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$; $y=x-\frac{\pi}{2}$ — асимптота при $x \to +\infty$; $y=x+\frac{\pi}{2}$ — асимптота при $x \to -\infty$. **120.** При $x=-1$ максимум $y=-1+\frac{\pi}{2}$; при

$x=1$ минимум $y=1-\frac{\pi}{2}$; $y=x-\pi$ — асимптота при $x\to+\infty$; $y=x+\pi$ — асимптота при $x\to-\infty$. **121.** При $x=2$ минимум $y=4\sqrt{e}$; при $x=-1$ максимум $y=\frac{1}{e}$; $x=0$ — асимптота при $x\to 0+$; $y=x+3$ — асимптота; $\lim\limits_{x\to 0-} y=0$. **122.** При $x=2$ минимум $y=2e+1$; $y=x+3$ — асимптота; $x=0$ — асимптота при $x\to 0+$; $\lim\limits_{x\to 0-} y=1$. **123.** $y=-x+1$ — асимптота; $x=0$ — асимптота при $x\to 0+$; $\lim\limits_{x\to 0-} y=0$; $x=-\frac{1}{2}$ — точка перегиба. **124.** При $x=\frac{2}{3}$ максимум $y=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; при $x=0$ минимум $y=0$; $y=-x+\frac{1}{3}$ — асимптота. **125.** Симметрия относительно начала координат, $y=x$ — асимптота. **126.** При $x=1$ максимум $y=\sqrt[3]{4}$; при $x=3$ минимум $y=0$; $y=x-2$ — асимптота. **127.** $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ — асимптоты, где $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$. **128.** При $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi$ минимум $y=-\frac{\pi}{3}+n\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$; при $x=\frac{\pi}{3}+n\pi$ максимум $y=\frac{\pi}{3}+n\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, где $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$. **129.** При $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ минимум $y=-\sqrt[6]{\frac{32}{27}}$; при $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ максимум $y=\sqrt[6]{\frac{32}{27}}$; $y=-x$ — асимптота. **130.** 25×50. **131.** $\frac{ah}{4}$. **132.** $\frac{a}{6}$. **133.** $\sqrt[3]{2V}\times\sqrt[3]{2V}\times\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$. **134.** $r:(4+\pi)$. **135.** $\frac{4}{27}\pi R^2h$. **136.** $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

137. $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, где a и b — расстояния от точки до сторон угла.

138. $2ab$, где a и b — расстояния от точки до сторон угла.

139. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 140. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x$. 2. $\frac{x^5}{5}+\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}-\ln|x|+5x$.

3. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}$. 4. $x^5-\frac{1}{3x^3}$. 5. $\frac{5}{6}\sqrt[5]{x}(x-6)$. 6. $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$.

7. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|$. 8. $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}$. 9. $\frac{3\cdot 4^x}{\ln 4}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

10. $2e^x+\frac{1}{2x^2}$. 11. $2\operatorname{arctg}x-3\arcsin x$. 12. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$.

13. $e^x+\operatorname{tg}x$. 14. $5\sin x-\cos x$. 15. $-(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)$. 16. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

17. $3\operatorname{tg}x-4\operatorname{ctg}x$. 18. $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x$. 19. $\cos x-\operatorname{ctg}x$. 20. $\operatorname{tg}x-x$.

21. $-(x+\operatorname{ctg}x)$. 22. $\frac{1}{2}(x-\sin x)$. 23. $\frac{1}{2}(x+\sin x)$. 24. $x+\cos x$.

25. $\frac{(2e)^x}{\ln 2+1}$. 26. $\arcsin x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$. 27. $\frac{\sin 5x}{5}$. 28. $-\frac{\cos 7x}{7}$.

29. $4\sin\frac{x}{4}$. 30. $-e^{-x}$. 31. $2(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})$. 32. $\frac{\operatorname{tg}3x}{3}$. 33. $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

34. $\frac{(2+5x)^{10}}{50}$. 35. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$. 36. $\frac{1}{3}(2x-5)^{\frac{3}{2}}$.

37. $-\frac{3}{28}(3-7x)^{\frac{4}{3}}$. 38. $\frac{1}{5}\ln|5x+2|$. 39. $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|$.

40. $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$. 41. $\ln|\sin x|$. 42. $-\ln|\cos x|$. 43. $-\frac{1}{3}\ln|1+$

$+3\cos x|$. 44. $-\frac{1}{4(\ln x+1)^4}$. 45. $\frac{1}{3}\ln|3+\sin 3x|$. 46. $\ln|\sin 2x|$.

47. $\frac{\sin^3 x}{3}$. 48. $-\frac{\cos^4 x}{4}$. 49. $-e^{\cos x}$. 50. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}$. 51. $2e^{\sqrt{x}}$.

52. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x$. 53. $\frac{1}{4\cos^4 x}$. 54. $\frac{3}{4}(2+\ln x)^{\frac{4}{3}}$. 55. $-\frac{2}{15}(3+$

$+\cos 5x)^{\frac{3}{2}}$. 56. $\frac{7}{90}(3+5\sin 3x)^{\frac{6}{7}}$. 57. $\frac{1}{8}\ln(5+2e^{4x})$. 58. $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}$.

59. $\frac{3}{4}(\arcsin x)^{\frac{4}{3}}$. 60. $\frac{\sin x-2}{\cos x}$. 61. $2\ln|\sin x|-\operatorname{ctg} x$. 62. $e^{\sin x}$.

63. $e^{\operatorname{tg} x}$. 64. $\frac{5}{18}(x^3-8)^{\frac{6}{5}}$. 65. $-\frac{2}{75}(1-6x^5)^{\frac{5}{4}}$. 66. $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}$.

67. $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}$. 68. $\frac{2x+9}{4}\cdot\sqrt{4x+1}$. 69. $\frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}$.

70. $\frac{4(17-14x)}{147}\sqrt{7x-1}$. 71. $e^{\operatorname{arctg} x}$. 72. $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2}$. 73. $-\frac{4^{1-3x}}{3\ln 4}$.

74. $-\frac{\arccos^2 x}{2}$. 75. $-e^{-\operatorname{tg} x}$. 76. $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}$.

77. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|$. 78. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. 79. $\arcsin\frac{x}{2}$.

80. $\ln|x+\sqrt{4+x^2}|$. 81. $\ln|x+\sqrt{x^2-3}|$.

82. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|$. 83. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. 84. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|$.

85. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}$. 86. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{5}$. 87. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+\sqrt{3+2x^2}|$.

88. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|$. 89. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{15}x}{5}$. 90. $\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}x}{\sqrt{3}-\sqrt{5}x}\right|$.

91. $\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-5}|$. 92. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. 93. $\frac{1}{4}\ln|x^4+\sqrt{x^8-3}|$.

94. $\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{5}}$. 95. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-\cos 2x}{\sqrt{5}+\cos 2x}\right|$. 96. $\frac{1}{4}\ln|(x-2)(x+2)^7|$.

97. $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{x^2+1}$. 98. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$.

99. $5\ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-4}|$. 100. $\frac{1}{5\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}\sin 5x)$.

01. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cos\frac{x}{3}}{3}$. 102. $\frac{1}{5}\arcsin\frac{x^5}{2}$. 103. $\frac{1}{7\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^7}{\sqrt{5}}$.

104. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}$. 105. $\operatorname{arctg}(x+2)$. 106. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$.

07. $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|$. 108. $\arcsin\frac{x-2}{2}$. 109. $\arcsin\frac{x+1}{2}$.

110. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$. 111. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\right|$.

112. $\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$.

113. $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+3)-\frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$.

114. $\frac{1}{2}\ln|x^2+x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|$.

115. $\frac{4}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+29)$.

116. $-3\sqrt{5-4x-x^2}-8\arcsin\frac{x+2}{3}$.

117. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}\right|-\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+3}$.

118. $26\arcsin\frac{x-3}{2}-5\sqrt{6x-x^2-5}$.

119. $3\sqrt{6x-x^2}-8\arcsin\frac{x-3}{3}$.

120. $\frac{1}{2}\sqrt{3x+2x^2}+\frac{9}{4\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right|$.

121. $4\sqrt{x^2+8x+7}-5\ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+7}|$.

122. $\frac{7}{2}\ln|x^2-6x+1|+\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3-2\sqrt{2}}{x-3+2\sqrt{2}}\right|$.

123. $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|$. 124. $\frac{3}{2}x^2-3x+8\ln|x+1|$.

125 $\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. 126. $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}$.

127. $\frac{(x+4)^2}{2}+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}$. 128. $\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\ln|2x+1|$.

129. $2x+\ln(x^2-x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

130. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+9x+27\ln|x-3|$.

131. $\frac{3}{2}x^2+16x+33\ln(x^2-6x+10)+38\operatorname{arctg}(x-3)$.

132. $\frac{(x+8)^2}{2}+\frac{55}{2}\ln|x^2-8x+7|+\frac{82}{3}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|$. 133. $3x+$

$+\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 134. $\frac{1}{2}\ln(x^2+7x+13)-$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}$. 135. $\frac{x^4}{4}+x^3+3x^2+18x+54\ln|x-3|$.

136. $x-\frac{5}{2}\ln|x^2+8x-7|+\frac{27}{2\sqrt{23}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{23}}{x+4+\sqrt{23}}\right|$.

137. $x(\ln x-1)$. 138. $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)$. 139. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-$

$-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}$. 140. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x$.

141. $-e^{-x}(x+1)$. 142. $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)$. 143. $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$.

144. $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)$. 145. $e^{2x}(x+1)$. 146. $x\sin x+\cos x$.

147. $\sin x - x\cos x$. 148. $\frac{x+1}{3}\sin 3x + \frac{\cos 3x}{9}$. 149. $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x$. 150. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$. 151. $\ln|\sin x| - x\operatorname{ctg} x$. 152. $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$. 153. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 154. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. 155. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$. 156. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}(1-x) - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$. 157. $2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$.

158. $x\operatorname{arctg}\sqrt{7x-1} - \frac{1}{7}\sqrt{7x-1}$. 159. $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x$.

160. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$. 161. $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$. 162. $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x)$. 163. $\frac{2}{5}e^x\left(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$. 164. $x[1+(\ln x - 1)^2]$.

165. $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\left(\ln x - \frac{5}{4}\right)$. 166. $x\ln(x^2+2) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$

167. $\frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$. 168. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

169. $\ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + x\operatorname{tg} x$. 170. $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

171. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$. 172. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| - \frac{\ln(x+2)}{x}$.

173. $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln|1+x|$. 174. $\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}(3+\ln x)$.

175. $\frac{x}{2}\sqrt{7-x^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}$.

176. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-5} - \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-5}|$.

177. $\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$. 178. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}+\ln|x+\sqrt{x^2+2}|$.

179. $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}-x^2}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

180. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}\right|\right)$.

181. $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-3}{3}$. 182. $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x}-$

$-2\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x}|$. 183. $\frac{2x+5}{4}\sqrt{x^2+5x+4}-$

$-\frac{9}{8}\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+4}\right|$. 184. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+$

$+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. 185. $\frac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}$.

186. $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)$.

187. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\sqrt{2-3\cos^2 x}+\arcsin\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{2}}\right]$.

188. $\frac{e^x}{2}\sqrt{e^{2x}+3}+\frac{3}{2}\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+3})$. 189. $\frac{\sin x}{2}\sqrt{\sin^2 x+3}+$

$+\frac{3}{2}\ln|\sin x+\sqrt{\sin^2 x+3}|$.

190. $e^{\frac{x}{2}}\sqrt{4-e^x}+4\arcsin\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$. 191. $\frac{\ln x}{2}\sqrt{\ln^2 x+1}+\frac{1}{2}\ln|\ln x+$

$+\sqrt{\ln^2 x+1}|$. 192. $\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x-3}{3}+\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{3x-x^2}-$

$-\frac{2}{3}(3x-x^2)^{\frac{3}{2}}$. 193. $\frac{1}{6}(5x+2x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)\times\right.$

$\left.\times\sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}-\frac{25}{16}\ln\left|x+\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}\right|\right]$.

194. $-\frac{1}{3}(-6x-x^2)^{\frac{3}{2}}-2\left[(x+3)\sqrt{-6x-x^2}+9\arcsin\frac{x+3}{3}\right]$.

195. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. 196. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. 197. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2mx$.

198. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4m}\sin 2mx$. 199. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$. 200. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$.

201. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. 202. $\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}-\cos x$.

203. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. 204. $\frac{\cos^3\frac{x}{2}}{12}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{4}$. 205. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$.

206. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}$. 207. $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}$. 208. $\sin x-\sin^3 x+$

$+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}$. 209. $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}$. 210. $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}$.

211. $\frac{3}{8}x-\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{16}$. 212. $3x+4\sin x+\sin 2x$. 213. $\sin x-$

$-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}$. 214. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|$. 215. $3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{6}\right)\right|$.

216. $\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{9x}{2}\right|$. 217. $\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}\right)\right|$. 218. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\right.$

$\left.+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right]$. 219. $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)$. 220. $\frac{1}{4}\sin 2x-$

$-\frac{1}{16}\sin 8x$. 221. $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]$.

222. $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)$. 223. $-\frac{1}{12}\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{8}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$.

224. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. 225. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x$. 226. $\frac{1}{\cos x}+\cos x$.

227. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. 228. $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}$. 229. $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-$

$-\frac{\cos^2 x}{2}$. 230. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$. 231. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$.

232. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. 233. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. 234. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|$.

235. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. 236. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$.

237. $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. 238. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3\sin^3 x}$

239. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|$. 240. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|$.

241. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right)$. 242. $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|$.

243. $\frac{1}{5}\ln|1-5\operatorname{ctg} x|$. 244. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$. 245. $-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}$.

246. $-\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{b}\right)$. 247. $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$.

248. $\operatorname{tg}^2 x$. 249. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg}(e^x)$. 250. $\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+$

$+4\ln(e^x+2)$. 251. $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+e^x+\ln|e^x-1|$.

252. $e^x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$. 253. $2\ln|e^x-1|-x$. 254. $e^x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+$

$+e^x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}$. 255. $\frac{3}{2}\ln(e^{2x}+4)-2\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}$.

256. $\frac{e^{4x}}{4}-\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}-e^x+\ln(e^x+1)$. 257. $\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$.

258. $\frac{\operatorname{tg} x}{3}+\operatorname{tg} x$. 259. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$. 260. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x+\ln|\operatorname{tg} x|)$.

261. $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x} + \ln|\sin x|$. 262. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x)$.

263. $-(-x^2-8x)^{\frac{3}{2}} - \frac{13}{2}\left[(x+4)\sqrt{-x^2-8x} + 16\arcsin\frac{x+4}{4}\right]$.

264. $\frac{3}{2}x^2 - 17x + 36\ln(x^2+6x+10) - 46\operatorname{arctg}(x+3)$.

265. $\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{2e^x-1-\sqrt{17}}{2e^x-1+\sqrt{17}}\right| - \frac{5}{2}\ln|e^x+4-e^{2x}|$.

266. $\frac{5}{3}(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{4}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+3x+5} + \right.$

$\left. + \frac{11}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right|\right]$. 267. $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)$.

268. $-\frac{2}{9}(3x^2+8x)^{\frac{3}{2}} + \frac{11}{2\sqrt{3}}\left[\left(x+\frac{4}{3}\right)\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x} - \right.$

$\left. - \frac{16}{9}\ln\left|x+\frac{4}{3}+\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}\right|\right]$. 269. $6\sqrt{x^2+5x+17} -$

$-25\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+17}\right|$.

270. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+1)\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\ln\left|x+1+\right.\right.$

$\left.\left. + \sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}\right|\right]$.

271. $4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}$. 272. $\frac{3}{2}\ln|x^2+10x+1| -$

$-\frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{6}}{x+5+2\sqrt{6}}\right|$. 273. $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

274. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$. 275. $\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2} +$

$+ 2\arcsin\frac{x-1}{2}$. 276. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x|$. 277. $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{12}\right)\operatorname{arctg}(2x+1) -$

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{6}-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right).\quad 278.\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right].\quad 279.\ -\operatorname{ctg}x\ln(\cos x)-x.$$

$$280.\ 2\sqrt{x-3}\ln(x+\sqrt{x^2-9})-4\sqrt{x+3}.$$

$$281.\ \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right).\quad 282.\ \frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{5x}{2}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$283.\ \frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2-\sqrt{5}}\right|.\quad 284.\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}}.$$

$$285.\ \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\sqrt{5}}\right|.\quad 286.\ \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}3x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg}3x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|.$$

7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. $\frac{10}{3}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. 2. 4. 0. 5. 5π. 6. 1. 7. $\operatorname{arctg}2$. 8. $\frac{1}{4}\ln\frac{4}{e}$. 9. $\frac{5}{6\sqrt{2}}$.

10. $\frac{2}{3}$. 11. $\frac{2}{15}$. 12. $\frac{3(e-1)}{e}$. 13. 0. 14. $\frac{e^2-5}{e}$. 15. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$.

16. $\frac{2}{15}R^5$. 17. $e-2$. 18. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. 19. 1. 20. $\frac{4}{3}$. 21. $\frac{8}{3}$. 22. $\frac{4}{3}$.

23. $\frac{2}{3}$. 24. $\frac{1}{3}$. 25. $\frac{1}{6}$. 26. $\frac{1}{2}$. 27. $\frac{\pi-2}{4}$. 28. $2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$.

29. $\frac{3}{4}$. 30. $\frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}$. 31. $\frac{32}{3}$. 32. $\frac{8}{3}$. 33. $12-5\ln 5$. 34. $\frac{3}{2}-2\ln 2$.

35. $4\ln(4e)$. 36. $\frac{3\pi}{2}a^2$. 37. $\frac{\pi a^2}{4}$. 38. $\frac{\pi a^2}{4}$. 39. $\frac{9\pi}{2}$. 40. $\frac{a^2(e^{4\pi}-1)}{4}$.

41. $\frac{\pi a^2}{4}$. 42. $\frac{\pi a^2}{4}$. 43. $3\pi a^2$. 44. $\frac{\pi a^2}{4}$. 45. $\frac{\pi a^2}{4}$. 46. $\frac{19}{3}$, $\frac{2e-1}{e}$, a^2, 2,

$\frac{3\pi a^2}{8}$, $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. **47.** $\frac{256}{15}\pi$, 8π. **48.** $\frac{\pi}{30}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11}{30}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$.

49. $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$, 2π. **50.** $\frac{128}{5}\pi$, 8π. **51.** $\frac{178}{15}\pi$, $\frac{21}{2}\pi$. **52.** $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{5}$.

53. $\frac{4\pi ab^2}{3}$. **54.** $\pi(e-2)$, $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$, πe, $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$, $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$, $\pi(4-e)$.

55. $\frac{\pi^2}{2}$, $2\pi^2$, $6\pi^2$, $2\pi(\pi+2)$, $2\pi(\pi+4)$, $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$, $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$.

56. $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **57.** $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{\pi}{6}$. **58.** $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$. **59.** $\frac{\pi^2}{2}$, $10\pi^2$, $6\pi^2$, $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **60.** $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{15}$, $\frac{16\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{5}$. **61.** 12π, 24π. **62.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$, $\pi\ln 2$.

63. $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$. **64.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **65.** $\frac{670}{27}$. **66.** $\frac{28}{3}$. **67.** $\frac{a(e^2-1)}{2e}$.

68. $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$. **69.** $\ln 3$. **70.** $6a$. **71.** $8a$. **72.** 32.

73. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **74.** $\frac{e^2+1}{4}$. **75.** $\frac{bm}{3}$, $\frac{am}{3}$; $\frac{8m}{5}$, $\frac{3m}{4}$; $\frac{m}{10}$, $\frac{m}{2}$; $\frac{2m}{5}$, $\frac{m}{2}$; $\frac{\pi m}{8}$, m; $\frac{12m}{5}$, $\frac{3m}{4}$. **76.** $\left(\frac{\pi-2}{4}, \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{\pi-1}{3}, \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{8}\right)$. **77.** $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{12}{5}\right)$. **78.** На оси конуса, на расстоянии $\frac{3h}{4}$ от вершины. **79.** $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$. **80.** На оси симметрии, на расстоянии $\frac{3R}{8}$ от центра шара. **81.** На оси симметрии, на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра сферы. **82.** $(0, 3, 0)$. **83.** $\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi^2+4}{32}, 0\right)$, $\left(0, \frac{2}{5}, 0\right)$, $\left(0, \frac{5}{16}, 0\right)$, $\left(0, \frac{3}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{21}{16}, 0, 0\right)$.

84. $\frac{c^2m}{3}$, $\frac{48m}{7}$, $\frac{h^2m}{6}$, $\frac{(\pi^2-4)m}{2}$. 85. $\frac{R^2m}{2}$. 86. $\frac{2R^2m}{5}$. 87. $\frac{2R^2m}{3}$. 88. $\frac{3R^2m}{10}$. 89. $\frac{2m}{5}$, $\frac{3(\pi^2-8)m}{4}$, $\frac{4m}{3}$, $\frac{8m}{5}$, $(\pi^2-6)m$, $\frac{39m}{20}$, $\frac{3b^2m}{5}$, $\frac{R^2+r^2}{2}m$. 90. $\frac{R^2m}{2}$. 91. $\frac{3RP}{8}$, $\frac{5RP}{8}$; $\frac{HP}{4}$, $\frac{3HP}{4}$; $\frac{HP}{2}$. 92. $P_0V_0\ln 2$.

8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. 1. 2. $\frac{1}{\alpha-1}$ при $\alpha>1$; расходится при $\alpha\leqslant 1$. 3. $\frac{1}{4}\ln 3$. 4. Расходится. 5. Расходится. 6. Расходится. 7. -1. 8. $\frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha<1$; расходится при $\alpha\geqslant 1$. 9. $\frac{\pi}{2}$. 10. -1. 11. 2. 12. Расходится. 13. 0. 14. Расходится. 15. $6\sqrt[3]{2}$. 16. Расходится. 17. Расходится. 18. $\frac{1}{2}$. 19. π. 20. 1. 21. 4π. 22. 2π.

9. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

1. 2. 2. 2. 3. 2. 4. 6. 5. $\frac{3}{2}$. 6. 10. 7. 1. 8. $\frac{3}{2}$. 9. 3. 10. 3. 11. 2. 12. 2. 13. 3. 14. 2. 15. 2. 16. 1. 17. 2. 18. 4. 19. 1. 20. 4. 21. 6. 22. 3. 23. 4. 24. 101. 25. 3. 26. 2. 27. 9. 28. $\frac{9}{2}$. 29. $\frac{5}{6}$. 30. $\frac{4}{3}$. 31. 2. 32. $\frac{3}{2}$. 33. 11. 34. 1. 35. $\frac{3}{2}$. 36. 6. 37. $\frac{6}{5}$. 38. 3. 39. $\frac{3}{2}$. 40. 4. 41. $\alpha+\frac{1}{3}$.

10. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. $\frac{1}{1-q}$. 2. $\frac{3}{4}$. 3. $2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. 4. 1. 5. $\frac{11}{18}$. 6. $\frac{1}{4}$. 7. $\frac{7}{36}$. 8. $\frac{9}{64}$. 9. $\frac{1}{(1-a)^2}$. 10. $1-\sqrt{2}$. 11. Расходится. 12. Сходится. 13.

Расходится. **14.** Расходится. **15.** Расходится. **16.** Расходится. **17.** Расходится. **18.** Сходится. **19.** Сходится. **20.** Расходится. **21.** Расходится. **22.** Сходится. **23.** Сходится. **24.** Расходится. **25.** Сходится. **26.** Сходится. **27.** Сходится. **28.** Расходится. **29.** Сходится. **30.** Сходится. **31.** Сходится. **32.** Сходится. **33.** Сходится. **34.** Расходится. **35.** Сходится. **36.** Расходится. **37.** Сходится. **38.** Сходится. **39.** Сходится. **40.** Сходится. **41.** Расходится. **42.** Сходится. **43.** Сходится. **44.** Сходится при $\alpha > 0$; расходится при $\alpha \leqslant 0$. **45.** Сходится. **46.** Сходится. **47.** Расходится. **48.** Расходится. **49.** Расходится. **50.** Сходится. **51.** Сходится. **52.** Расходится. **53.** Расходится. **54.** Сходится. **55.** Расходится. **56.** Сходится. **57.** Сходится. **58.** Сходится. **59.** Сходится. **60.** Расходится. **61.** Сходится. **62.** Расходится. **63.** Сходится. **64.** Сходится. **65.** Сходится. **66.** Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$; расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. **67.** Сходится. **68.** Сходится при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \leqslant 1$. **69.** Сходится при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \leqslant 1$. **70.** Сходится. **71.** Расходится. **72.** Сходится. **73.** Расходится. **74.** Сходится. **75.** Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. **76.** Условно сходится. **77.** Условно сходится. **78.** Условно сходится. **79.** Абсолютно сходится. **80.** Абсолютно сходится. **81.** Расходится. **82.** Абсолютно сходится. **83.** Расходится. **84.** Условно сходится. **85.** Условно сходится. **86.** Абсолютно сходится. **87.** Условно сходится. **88.** Расходится. **89.** Условно сходится. **90.** Абсолютно сходится.

11. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Абсолютно сходится при $|x| < 1$. **2.** Сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{5}$. **3.** Сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{|a|}$. **4.** Сходится абсолютно при $|x| > 1$. **5.** Сходится абсолютно при $|x| > 1$. **6.** Сходится абсолютно при $x > 0$. **7.** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **8.** Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$. **9.** Сходится абсолютно при $-\infty < x < -\frac{2}{5}$, $0 < x < +\infty$; сходится условно при $x = -\frac{2}{5}$. **10.** Сходится абсолютно при $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 3$. **11.** Сходится абсолютно при $-\infty < x < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} < x < +\infty$; сходится условно при $x = \frac{1}{2}$. **12.** Сходится абсолютно

при $-\frac{5}{4}<x<\frac{1}{2}$; при $x=-\frac{5}{4}$ и $x=\frac{1}{2}$ сходится абсолютно, если $p>1$; при $x=\frac{1}{2}$ сходится условно, если $0<p\leqslant 1$. **13.** Сходится абсолютно при $-\infty<x<-2$, $-\frac{4}{3}<x<+\infty$; сходится условно при $x=-2$. **14.** Сходится абсолютно при $0<x<+\infty$. **15.** Сходится абсолютно при $|x|<1$. **16.** Сходится при $0<x<\frac{1}{e}$. **17.** Сходится абсолютно при $|x|<1$. **18.** Сходится абсолютно при $-\infty<x<-3$, $1<x<+\infty$; сходится условно при $x=-3$. **19.** Сходится абсолютно при $-\infty<x<0$; сходится условно при $x=0$. **20.** Сходится абсолютно при $\frac{1}{e}<x<e$. **21.** Сходится абсолютно при $|x|<e$. **22.** Сходится абсолютно при $|x|<1$; сходится условно при $x=-1$. **23.** Сходится абсолютно при $0<x<2$; сходится условно при $x=0$. **24.** Сходится при $x=0$. **25.** Сходится абсолютно при $|x|<+\infty$. **26.** Сходится абсолютно при $|x|<1$. **27.** Сходится абсолютно при $|x|<+\infty$. **28.** Сходится абсолютно при $|x|<+\infty$. **29.** Сходится абсолютно при $|x|<a$. **30.** Сходится абсолютно при $x>0$. **31.** Сходится абсолютно при $|x|<+\infty$. **32.** Сходится абсолютно при $|x|<\frac{1}{2}$. **33.** Сходится абсолютно при $|x|<+\infty$. **34.** Сходится абсолютно при $|x|\leqslant 1$. **35.** Сходится абсолютно при $|x|<2$; сходится условно при $x=-2$. **36.** Сходится абсолютно при $|x|<1$; сходится условно при $x=-1$. **37.** Сходится абсолютно при $4<x<6$; сходится условно при $x=4$. **38.** Сходится абсолютно при $|x|<10$; сходится условно при $x=-10$. **39.** Сходится абсолютно при $|x|<e$. **40.** Сходится абсолютно при $-\infty<x<-4$; сходится условно при $x=-4$. **41.** Сходится абсолютно при $-\frac{11}{4}<x<+\infty$. **42.** а) сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **43.** а) сходится равномерно; б) сходится неравномерно; в) сходится неравномерно. **44.** Сходится равномерно. **45.** а) сходится неравномерно; б) сходится неравномерно; в) сходится равномерно. **46.** Сходится неравномерно. **47.** Сходится неравномерно. **48.** Сходится равномерно. **49.** Сходится равномерно. **50.** а) сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **51.** а) сходится равномерно; б) сходится равномерно; в) сходится неравномерно; г) сходится неравномерно. **52.** Сходится равномерно. **53.** а) сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **54.** Сходится неравномерно. **55.** а) сходится неравномерно; б) сходится

равномерно. **56.** а) сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **57.** Сходится неравномерно. **58.** а) сходится неравномерно; б) сходится равномерно; в) сходится равномерно. **59.** а) сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **60.** Сходится неравномерно. **61.** а) сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **62.** Сходится неравномерно. **63.** Сходится неравномерно. **64.** Сходится неравномерно. **65.** Сходится неравномерно. **66.** Сходится равномерно. **67.** Сходится равномерно. **68.** Сходится неравномерно. **69.** Сходится неравномерно. **84.** $-\ln(1-x)$, $-1 \leqslant x < 1$.

85. $\ln(1+x)$, $-1 < x \leqslant 1$.. **86.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$.

87. $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, $|x|<1$. **88.** $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, $|x|\leqslant 1$.

89. $\operatorname{arctg} x$, $|x|\leqslant 1$. **90.** $\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. **91.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x|<1$.

92. $\frac{1}{(1+x)^2}$, $|x|<1$. **93.** $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, $|x|<1$.

12. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x|<+\infty$. **2.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<+\infty$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, $|x|<+\infty$. **4.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{n+2}}{n!}$, $|x|<+\infty$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}$, $|x|<+\infty$. **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<+\infty$.

7. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<+\infty$. **8.** $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$,

$|x|<+\infty$. **9.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, $|x|<1$. **10.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$, $|x|<1$.

11. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$, $|x|<\frac{1}{2}$. **12.** $3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}$, $|x|<4$.

13. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$, $|x|<\frac{3}{2}$. **14.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n x^{2n}}{2^{n+1}}$, $|x|<\sqrt{\frac{2}{3}}$.

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{2^{n+1}}-\frac{14}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<2$. 16. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(5-3^{1-n})x^n$, $|x|<1$

17. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n$, $|x|<2$. 18. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$, $|x|<1$

19. $\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$. 20. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $|x|<\frac{1}{3}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n x^n}{n}$, $-\frac{1}{5}<x\leqslant\frac{1}{5}$.

22. $\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^n\cdot\frac{x^n}{n}$, $-\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{5}{2}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^{2n}}{n}$, $|x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n-2^n}{n}x^n$, $-\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{3}$.

25. $\ln 4-\sum_{n=1}^{\infty}(1+4^{-n})\frac{x^n}{n}$, $-1\leqslant x<1$.

26. $\ln 9-\sum_{n=1}^{\infty}(1+9^{-n})\frac{x^n}{n}$, $-1\leqslant x<1$.

27. $\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right]\frac{x^n}{n}$, $-2<x\leqslant 2$.

28. $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{2}{6}x^6-\ldots+$

$+\frac{(-1)^n x^{3n-2}}{3n-2}+\frac{(-1)^{n+1}x^{3n-1}}{3n-1}+\frac{(-1)^{n+1}2x^{3n}}{3n}+\ldots$, $-1<x\leqslant 1$

29. $x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2}{6}x^6+\ldots+$

$+\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\frac{x^{3n-1}}{3n-1}-\frac{2x^{3n}}{3n}+\ldots$, $-1\leqslant x<1$.

30. $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{(2n)!!}x^{2n},\ |x|\leqslant 1.$

31. $1+\frac{x}{5}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\cdot9\cdot14\cdots(5n-6)}{5^n n!}x^n,\ |x|\leqslant 1.$

32. $3+\frac{x}{27}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{3^{4n-1}n!}x^n,\ |x|\leqslant 27.$

33. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!}x^{2n},\ |x|<2.$

34. $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{3^{2n+1}(2n)!!}x^{2n},\ |x|\leqslant 3.$

35. $x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2(n+1)}}{(2n+1)(2n)!!},\ |x|\leqslant 1.$ 36. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{2n+1},\ |x|\leqslant 1.$

37. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)},\ |x|\leqslant 2.$

38. $3x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},\ |x|\leqslant\frac{1}{3}.$

39. $3x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},\ |x|\leqslant\frac{1}{3}$

40. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},\ |x|<+\infty.$

41. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2},\ |x|\leqslant 1.$ 42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!},\ |x|<+\infty.$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2},\ |x|\leqslant 1.$ 44. $2(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3,\ |x|<+\infty.$

45. $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!},\ |x|<+\infty.$ 46. $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^{n+1}},\ -6<x<0$

47. $2+\frac{x-4}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^{3n-1}n!}(x-4)^n,\ 0\leqslant x\leqslant 8.$

48. $-1+\frac{x+1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^{n+1}, \quad -2\leqslant x\leqslant 0.$

49. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}-1\right)\cdot(x+3)^n, \quad -4<x<-2.$

50. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot(x+4)^n, \quad -6<x<-2.$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}, \quad 0<x\leqslant 2.$

52. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}, \quad |x|<+\infty$

53. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}\cdot(x-2)^{2n}, \quad |x|<+\infty.$

54. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\cdot\frac{(x-1)^n}{n!}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right), \quad |x|<+\infty.$

55. 2,154. 56. 1,649. 57. 3,107. 58. 0,309. 59. 0,493. 60. 0,747.

13. РЯДЫ ФУРЬЕ

1. $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$. 2. $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$.

3. $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$. 4. $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$.

5. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n}$. 6. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\frac{\pi^2}{8}$.

7. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; $\frac{\pi}{4}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

9. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

10. $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\right]$.

11. $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}+\frac{(-1)^n\sin nx}{n}\right]$.

12. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $\frac{\pi^2}{6}$; $\frac{\pi^2}{12}$.

13. а) $\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$;

б) $-1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$.

14. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. 15. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

16. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. 17. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$.

8. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$, $x\neq n$.

19. а) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$.

20. а) $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; б) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

21. а) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos nx}{4n^2-1}$; б) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

22. а) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2-1}$; б) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

23. а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$; б) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi nx}{n}$.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

40. $x^2=y^2+z^2$. 41. $x=y^2+z^2$. 42. а) $\frac{y^2+z^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$;

б) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. 43. $\frac{x^2+z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 44. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

45. $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$. **46.** $y = e^{-(x^2+z^2)}$. **47.** $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

48. $y = \sqrt[4]{x^2+z^2}$. **49.** $x^2+y^2 \neq 0$. **50.** $|x| \leqslant 3$, y — любое.

51. $y \neq -x$. **52.** $|y| \leqslant |x|$. **53.** $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

54. $x \geqslant 0$. **55.** $x^2+y^2 \leqslant a^2$. **56.** $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$.

57. $x^2+y^2 > a^2$. **58.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. **59.** $|y| \leqslant x^2$, $x \neq 0$. **60.** $x+y > 0$.

61. $x^2+y^2-z^2 < -a^2$. **62.** $x^2+y^2-z^2 \leqslant a^2$. **63.** $x^2+y^2 = c$.

64. $4x^2+y^2 = c$. **65.** $y+x = c$. **66.** $y^2-x^2 = c$. **67.** $y = e^x + c$.

68. $3x^2+2y^2 = c$, $c \neq 0$. **69.** $x^2+y^2+z^2 = c$. **70.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = c$

71. $x^2-y^2+z^2 = c$. **72.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$, $dz = ydx + xdy$.

73. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $dz = \dfrac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

74. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy \cos xy^2$, $dz = (y^2dx + 2xydy)\cos xy^2$.

75. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\sec^2\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\sec^2\dfrac{x}{y}$, $dz = \sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$.

76. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x+5y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{10y}{x+5y^2}$, $dz = \dfrac{dx+10ydy}{x+5y^2}$.

77. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$, $dz = y^x\left(\ln y \cdot dx + \dfrac{x}{y}dy\right)$.

78. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{2\sqrt{x}(x+y^2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{x}}{x+y^2}$, $dz = \dfrac{2xdy-ydx}{2\sqrt{x}(x+y^2)}$.

79. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y(\cos xy - xy \sin xy)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x(\cos xy - xy \sin xy)$,

$dz = (ydx + xdy)\cdot(\cos xy - xy \sin xy)$. **80.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad dz=\frac{y(ydx-xdy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

81. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-4y}{(x-y)^2}\operatorname{cosec}\frac{2(x+y)}{x-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4x}{(x-y)^2}\operatorname{cosec}\frac{2(x+y)}{x-y}$

$z=\frac{4(xdy-ydx)}{(x-y)^2}\operatorname{cosec}\frac{2(x+y)}{x-y}$. 82. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\sqrt{3}y}{|2x+y|\sqrt{x(x+2y)}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{3}x}{|2x+y|\sqrt{x(x+2y)}}$, $dz=\frac{\sqrt{3}(xdy-ydx)}{|2x+y|\sqrt{x(x+2y)}}$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{\sin^2(x^2+y^2)}\cdot\sin 2(x^2+y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{\sin^2(x^2+y^2)}\cdot\sin 2(x^2+y^2)$,

$$dz=2e^{\sin^2(x^2+y^2)}\cdot\sin 2(x^2+y^2)(xdx+ydy).$$

84. $\frac{dz}{dt}=e^y\left(\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)$. 85. $\frac{dz}{dt}=x^y\left(\frac{y}{x}\frac{dx}{dt}+\ln x\frac{dy}{dt}\right)$.

86. $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{dy}{dt}-\frac{y}{x}\frac{dx}{dt}\right)$.

87. $\frac{dz}{dt}=2\operatorname{ctg}(x^2+y^2)\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)$.

88. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+xyf''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f''$.

89. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}f''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}\left(f'+\frac{x}{y}f''\right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x}{y^3}\left(2f'+\frac{x}{y}f''\right)$. 90. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{y}}\left(2\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{y}}\left(2\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$. 91. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln y\frac{\partial x}{\partial u}+$

$+\frac{\sqrt{x}}{y}\frac{\partial y}{du}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln y\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\sqrt{x}}{y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

92. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4u\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4u^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2(u-v)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-4uv\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4v\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4v^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

93. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}v^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = u \cdot v\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{u}{v^3}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = u^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{u^2}{v^4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{2u}{v^3}\frac{\partial z}{\partial y}$$

94. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30$.

95. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -27\cos(3x - 2y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18\cos(3x - 2y)$,

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -12\cos(3x - 2y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 8\cos(3x - 2y)$.

96. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{2}{y^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -\dfrac{6x}{y^4}$

97. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 12xf'' + 8x^3 f'''$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -4yf'' - 8x^2 yf'''$,

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -4xf'' + 8xy^2 f'''$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 12yf'' - 8y^3 f'''$.

104. $d^2z = e^{3x-2y}(3dx - 2dy)^2$. **105.** $d^2z = -4\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^2 + 2\cos(x^2+y^2)\cdot(dx^2+dy^2)$. **106.** $d^2z = \dfrac{1}{x}\left(2dx\,dy - \dfrac{y}{x}dx^2\right)$.

107. $d^2z = \dfrac{2}{y}dxdy - \dfrac{x}{y^2}dy^2 - \dfrac{dx^2}{x}$. **108.** $d^2z = \dfrac{(ydx - xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

109. $d^2z = \left(\dfrac{xdy - ydx}{x^2}\right)^2 f'' - \dfrac{2dx(xdy - ydx)}{x^3}f'$. **110.** $d^3z = 6dxdydz$

111. $d^3z = (2xdx + 2ydy)^3 f''' + 12(xdx + ydy)\cdot(dx^2 + dy^2)f''$.

112. $d^nz = e^{ax+by}(adx+bdy)^n$. **113.** $d^nz = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!(dx+dy)^n}{(x+y)^n}$

114. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial l}\right)_M = 2(\cos\alpha + \sin\alpha)$, а) $1+\sqrt{3}$; б) $1+\sqrt{3}$; в) 2.

115. $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{e^x\cdot\cos\alpha + e^y\sin\alpha}{e^x + e^y}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

116. $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M = \cos\alpha + \frac{2}{3}\cos\beta - 2\cos\gamma$, а) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; б) $\frac{2}{5}$.

117. $\overline{\text{grad}}\, u = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $|\overline{\text{grad}}\, u| = 2\sqrt{6}$.

118. $\overline{\text{grad}}\, u = 2(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $|\overline{\text{grad}}\, u| = 2\sqrt{14}$.

119. $\overline{\text{grad}}\, u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $|\overline{\text{grad}}\, u| = 1$.

120. $\overline{\text{grad}}\, u = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $|\overline{\text{grad}}\, u| = 7$.

121. $x + 2y + 2z = 9$, $\frac{x-1}{1\,2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$. 122. $3x + 2y - 3z = 6$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2/3} = \frac{z-2}{-1}$. 123. $4x + 3y - z = 12$; $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-12}{-1}$. 124. $10x - 8y - z = 9$, $\frac{x-5}{-10} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-9}{1}$.

125. $2x + 4y - z = 5$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$. 126. $3x + 4y + z = 26$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{1}$. 127. $x + 2y - 2z = 1$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-2}$.

128. $3x - 2y - 2z = 1$, $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. 129. $6x - 4y - z = \pm 21$,

132. $z_{\min} = -7$ при $x = 1$, $y = 2$. 133. Экстремума нет.

134. $z_{\max} = \frac{1}{27}$ при $x = y = \frac{1}{3}$. 135. $z_{\max} = 12$ при $x = y = 4$.

136. $z_{\min} = -\frac{2}{e}$ при $x = -2$, $y = 0$. 137. $z_{\max} = 1$ при $x = -1$, $y = 1$. 138. $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = y = \frac{\pi}{3}$. 139. $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{\pi}{6}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. 2. 3. Да. 4. 5. Нет. 6. $y'x - y = 0$. 7. $y'x - y = x^2$.

8. $y'(x^2 - y^2) = 2xy$. 9. $y' = 2y$. 10. $y''(1 - x) + y'x - y = 0$.

17. $y = \frac{x^2}{4} + c$, $y = \frac{x^2}{4} - 1$. 18. $y = \frac{c}{\sqrt{2x+5}}$, $y = \sqrt{\frac{5}{2x+5}}$.

19. $y = ce^{x^2/2}$, $y = 10e^{x^2/2}$. 20. $y^2 = 6x + c$, $y^2 = 6x + 64$.

21. $y = \sin(x^2 + 2x + c)$, $y = \cos(x^2 + 2x)$. 22. $y^2 - x^2 = c$, $y^2 - x^2 = 16$.

23. $y = c(x + \sqrt{1 + x^2})$, $y = 4(x + \sqrt{1 + x^2})$. 24. $y = 2 \sin \ln \frac{c}{x}$,

$y = -2 \sin \ln x$. 25. $y = \frac{2}{\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c}$, $y = \frac{2}{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}$.

26. $y = \frac{c(2+x)}{2-x}$, $y = \frac{5(2+x)}{2-x}$. 27. $y = ce^{2\sqrt{x}} - 1$,

$y = e^{2\sqrt{x}} - 1$. 28. $y = 3 \sin(c + \sqrt{1 - x^2})$, $y = 3 \sin(\sqrt{1 - x^2} - 1)$.

29. $y = ce^{x^2+x}$, $y = \sqrt{3}e^{x^2+x}$. 30. $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \ln c(2x + 1)$.

31. $y = ce^{\arcsin \frac{x}{3}}$, $y = e^{\arcsin \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}}$. 32. $y = \frac{ce^{2x} - 1}{2}$, $y = \frac{3e^{2x} - 2}{4}$.

33. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x + c)$, $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 34. $y = 4 \sin \ln [c \cdot (x - 2 +$

$+ \sqrt{x^2 + 4x + 8})]$. 35. $y = 5 \sin(xe^x - e^x + c)$,

$y = 5 \sin(xe^x - e^x + 1)$. 36. $y = \frac{c + 4x}{x + 3}$. 37. $y = ce^{\sin 5x}$, $y = \frac{1}{5}e^{\sin 5x}$

38. $\sqrt{2 + y} = c - \operatorname{ctg} 2x$, $\sqrt{2 + y} = 2 - \operatorname{ctg} 2x$. 39. $y = \frac{c - \cos x}{x}$,

$y = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x}$. 40. $y = \frac{x}{x - x \ln x + c}$. 41. $y = \frac{c - e^x}{x}$.

42. $y = \frac{c - \cos 2x}{2e^x}$. 43. $y = \frac{c + \sin x}{x^2}$. 44. $y = x(\arcsin x + c)$.

45. $y=\frac{x^2}{2}\sqrt{4+x^2}+2x\ln c\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$. 46. $y=5x\cdot\sin\ln cx$.

47. $y=\frac{3cx^2-x}{1-cx}$. 48. $y=x\operatorname{tg}\ln cx$. 49. $cx=\sin\frac{y}{x}$.

50. $\sin\frac{y}{x}+\ln x=c$. 51. $y=xe^{cx}$. 52. $y=\frac{2x}{1-cx^2}$.

53. $y=\left(2\sin\frac{x}{2}+c\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 54. $y=(x+c)e^{x^2}$. 55. $y=2x\sqrt{x}+cx$.

56. $y=\frac{1}{x}(\arcsin x+c)$. 57. $y=\frac{c-e^{-x^2}}{2x^2}$. 58. $y=\ln x+\frac{c}{x}$.

59. $y=1+\frac{\ln\left(c\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$. 60. $y=\frac{1}{x\ln cx}$. 61. $y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+c}$.

62. $y^2=\frac{1}{1+ce^{x^2}}$. 63. $y(\ln x+1+cx)=1$.

64. $y^2\left(x^2+\frac{1}{2}+ce^{2x^2}\right)=1$. 65. $ny^n=nx-1+ce^{-nx}$.

66. $y=\frac{x^5}{120}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$. 67. $y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+$

$+c_1x+c_2$. 68. $y=-\frac{1}{4}\sin 2x+c_1x+c_2$. 69. $y=c_1x^3+c_2$.

70. $y=\pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{c_1-x^2}+c_1\arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)+c_2$. 71. $y=c_1\ln x+c_2$.

72. $y=c_1x^2+c_2$. 73. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$. 74. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$.

75. $x=e^y+c_1y+c_2$. 76. $y=4+c_2e^{c_1x}$. 77. $y=-\cos x+c_1\sin x+c_2$.

78. $y=-\frac{1}{3x^3}+c_1\ln c_2x$. 79. $\operatorname{ctg}y=c_2-c_1x$. 80. $y=(x-1)e^x+$

$+c_1x^2+c_2$. 81. $y=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{c_1}\ln(c_1x^2-1)+c_2$.

82. $y=\frac{c_1x-1}{c_1^2}e^{c_1x+1}+c_2$. 83. $y=x+c_1\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c_2$.

84. $y = \frac{x^3}{3} + c_1 x^2 + c_2$. 85. $y = c_1 x^2 - 5x + c_2$. 86. $y - \ln(c_1 + e^y) = c_1(x + c_2)$. 87. $y = c_1 + c_2 e^x$. 88. $y = c_1 \sin 5x + c_2 \cos 5x$.

89. $y = c_1 + c_2 e^{-25x}$. 90. $y = c_1 e^{2\sqrt{2}x} + c_2 e^{-2\sqrt{2}x}$. 91. $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$. 92. $y = e^x(c_1 + c_2 x)$. 93. $y = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$.

94. $y = e^{-2x}(c_1 \sin \sqrt{6}x + c_2 \cos \sqrt{6}x)$. 95. $y = c_1 e^x + e^{2x}(c_2 + c_3 x)$.

96. $y = c_1 \sin 10x + c_2 \cos 10x$. 97. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$.

98. $y = c_1 e^{19x} + c_2 e^x$. 99. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^x$.

100. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}}$. 101. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-6x}$.

102. $y = e^{-3x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$. 103. $y = c_1 \sin \sqrt{3}x + c_2 \cos \sqrt{3}x$.

104. $y = e^{-2x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x)$. 105. $y = e^{\sqrt{3}x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$.

106. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$. 107. $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$.

108. $y = c_1 e^{(2+\sqrt{11})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{11})x}$. 109. $y = c_1 e^{-10x} + c_1 e^x$.

110. $y = e^{-5x}(c_1 \sin 5\sqrt{3}x + c_2 \cos 5\sqrt{3}x)$.

111. $y = c_1 e^{\frac{\sqrt{41}-7}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{41}+7}{2}x}$. 112. $y = c_1 + c_2 e^{-4x}$.

113. $y = e^{-ax}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$. 114. $y = c_1 + c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x}$.

115. $y = c_1 + c_2 x + c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x$. 116. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x$. 117. $y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

118. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$. 119. $y = e^{4x}(c_1 + x) + c_2$.

120. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^{2x}$. 121. $y = e^{-3,5x}\left(c_1 \sin \frac{\sqrt{31}}{2}x + c_2 \cos \frac{\sqrt{31}}{2}x\right) + \frac{1}{28}e^x$. 122. $y = e^{-x/2}\left(c_1 \sin \frac{\sqrt{39}}{2}x + c_2 \cos \frac{\sqrt{39}}{2}x\right) + 0{,}3x^2 - 0{,}06x - 0{,}054$. 123. $y = e^{-x/2}\left(c_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{6}{13}\sin 2x - \frac{9}{13}\cos 2x$. 124. $y = c_1 e^{-2x} +$

$$+ c_2 e^{-x} + \frac{5}{42} e^{5x}.$$ **125.** $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{1}{24} \sin 5x.$

126. $y = \left(c_1 + \frac{x}{2}\right) \sin x + c_2 \cos x.$ **127.** $y = \left(c_1 + \frac{x}{6}\right) \sin 3x +$

$$+ c_2 \cos 3x.$$ **128.** $y = \left(c_1 - \frac{2}{3} x\right) e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$

129. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{5} e^{2x}.$ **130.** $y = e^{3x} \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}\right).$

131. $y = c_1 + c_2 e^{x} - \frac{x^2}{2} - 5x.$ **132.** $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{4}{9} x - \frac{14}{27}.$

133. $y = \left(c_1 + \frac{x}{2}\right) \sin x + c_2 \cos x - \frac{1}{24} \sin 5x.$

134. $y = e^{-4x} \left(c_1 - \frac{x}{4}\right) + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + c_2.$ **135.** $y = c_1 \sin 10x +$

$$+ c_2 \cos 10x + \frac{1}{96} \sin 2x.$$ **136.** $y = e^{-x} \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}\right).$

137. $y = e^{2x} \left(c_1 + \frac{x}{4}\right) + e^{-2x} \left(c_2 - \frac{3}{4} x\right).$ **138.** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} +$

$$+ 0{,}1 \cos x - 0{,}3 \sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}.$$ **139.** $y = c_1 \sin 3x +$

$$+ \left(c_2 - \frac{2}{3} x\right) \cos 3x + \frac{x}{9}.$$ **140.** $y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} -$

$$- \frac{x^2}{9} - \frac{20}{27} x.$$ **141.** $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{x}{3}.$ **142.** $y = \left(c_1 + \frac{x^2}{4}\right) \sin x +$

$$+ \left(c_2 + \frac{x}{4}\right) \cos x.$$ **143.** $y = c_1 e^{-x} + e^{x} \left(c_2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right).$

144. $y = e^{x/2} \left(c_1 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + \left(\frac{x}{2} + 1\right) \sin x +$

$$+ \frac{x+1}{2} \cos x.$$ **145.** $y = e^{-x/2} \left(c_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) +$

$$+ e^{x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} x + \frac{4}{9}\right).$$ **146.** $y = e^{3x} \left(c_1 + \frac{x}{6}\right) + c_2 e^{-3x}.$

147. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)$. **148.** $y = c_1 + c_2 e^{-x} +$

$+\left(1 - \frac{x}{2}\right)\sin x - \frac{x+1}{2}\cos x$. **149.** $y = \frac{x^2+3}{2}$. **150.** $y = \sqrt{1+x^2}$.

151. $y = 2e^{-x}$. **152.** $y = 3x^3$. **153.** $y^2 = 2x$. **154.** Параболоид вращения. Уравнение сечения плоскостью xoy: $y^2 = 2xc + c^2$, если источник поместить в начале координат. **155.** $\approx 4{,}3\%$. **156.** $x = \frac{1000}{t+100}$, если за x обозначить количество соли в резервуаре в момент t.

157. $s = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$, $s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$.

158. ≈ 35 *сек*. **159.** $5\log_2 20 \approx 21{,}5$ *мин*.

Татьяна Викторовна Казакова
Мария Васильевна Шеглова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор Фурман Г.Н.
Корректор Фомичева Т.А.

Подписано к печати 28.03.78. Формат 60x90/16 Бумага тип.3.
Усл. печ. л. 7,0 Уч.-изд. л. 6,19. Зак. 1348 Тираж 8300 экз.
Цена 15 коп. Заказная.

Издательство Московского университета.
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы